Derivación bajo la integral

José Alfredo Cañizo Rincón

1 de julio, 2004

1. Introducción

Estas notas contienen una presentación de los teoremas usuales de derivación bajo la integral y la regla de Leibniz. El objetivo es enunciar con precisión y demostrar un resultado que se suele dar por supuesto aunque no aparezca tan comúnmente en los libros de análisis, y que lo hace rara vez enunciado con precisión.

Pueden consultarse versiones más generales que incluyen condiciones necesarias y suficientes para intercambiar integral y derivada en [2]. Un curioso error causado por el uso injustificado de dicho intercambio por parte de Cauchy está recogido en [1].

La regla de derivación bajo la integral es la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{d\lambda}\int f(x,\lambda)\,dx = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx\,, \tag{1}$$

que dice esencialmente que cuando se deriva una integral respecto de un parámetro distinto a la variable en la que se integra, derivada e integral pueden intercambiarse. Según el sentido que se quiera dar a la integral y a la derivada, este resultado requiere distintas condiciones sobre la función f. A veces esta regla se llama también *regla de Leibniz*, pero es más común reservar el nombre de regla de Leibniz para la siguiente:

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx = f(g(\lambda),\lambda)\,g'(\lambda) + \int_{t_0}^{g(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx, \tag{2}$$

que también se demuestra en estos apuntes.

2. Resultado clásico

Desde un punto de vista clásico se puede intentar entender lo anterior en términos de la integral de Riemann y la derivada clásica. Las condiciones naturales para plantearlo parecen ser las siguientes a primera vista: si f es una función real que depende de dos variables x, λ, necesitamos que sea Riemann integrable en x para cualquier λ fijo para que el miembro de la izquierda tenga sentido, y también que la derivada con respecto a λ exista para todo x fijo para dar sentido al miembro derecho. Necesitamos también que dicha derivada sea integrable. ¿Qué se obtiene al intentar derivar $\int f(x,\lambda)\,d\lambda$?. Para h pequeño,

$$\frac{1}{h}\left(\int f(x,\lambda+h)\,dx - \int f(x,\lambda)\,dx\right) = \int \frac{1}{h}(f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda))\,dx\,, \tag{3}$$

y necesitamos pasar al límite en esta última integral. Esto puede hacerse cuando, fijado λ, el límite cuando $h \to 0$ dentro de dicha integral (que es, puntualmente, $\frac{df}{d\lambda}(x,\lambda)$) sea uniforme en x. Podemos escribir, gracias al teorema del valor medio, para cierto λ_x en el intervalo $[\lambda, \lambda+h]$:

$$\frac{1}{h}(f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_x), \tag{4}$$

así que bastaría si $\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_x) - \frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right|$ (la diferencia entre este valor y el límite puntual) fuese pequeño independientemente de x. Una condición que asegura esto y que es fácil de enunciar es que $\frac{\partial f}{\partial\lambda}$ sea uniformemente continua en sus dos variables. En un dominio compacto, es suficiente que sea continua. Esta última condición incluye a la de que la parcial de f sea integrable en λ, así que esto nos da el siguiente resultado, que aparece también en [3]:

Teorema 2.1 (Versión clásica)**.** *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I compacto y J abierto. Sea $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una función tal que*

- *$f(\cdot,\lambda)$ es integrable en I para todo $\lambda \in J$*
- *$f(x,\cdot)$ es derivable en J para todo $x \in I$.*

Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial\lambda}$ es continua en $I \times J$. Entonces,

- *$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\cdot,\lambda)$ es integrable para todo $\lambda \in J$*
- *$\int_I f(x,\lambda)\,dx$ es derivable con derivada continua en J para todo $x \in I$*

y se cumple la regla de derivación bajo la integral,

$$\frac{d}{d\lambda}\int_I f(x,\lambda)\,dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\,dx \qquad \forall\, \lambda \in J \tag{5}$$

Observación 2.2. Todas las integrales que aparecen en este teorema son integrales en el sentido de Riemann.

Observación 2.3. Las condiciones sobre los intervalos I, J son técnicas: se exige I compacto porque la integral de Riemann está definida sólo sobre intervalos compactos (aunque es posible extender el teorema para la integral de Riemann impropia); y se exige J abierto para evitar preocuparse de la derivada en los extremos, aunque el resultado es válido para cualquier intervalo J.

Demostración. Fijemos $\lambda \in J$, y demostremos que existe el límite de la derivada en λ y es el que se pide. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $d > 0$ suficientemente pequeño para que $[\lambda - d, \lambda + d] \subseteq J$. Como $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es uniformemente continua en $I \times [\lambda - d, \lambda + d]$, podemos elegir $0 < \delta \leq d$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_1) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_2) \right| \leq \frac{\epsilon}{|I|} \qquad \forall\, x \in I,\ \forall \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [\lambda - d, \lambda + d]$$
$$\text{tales que } |\lambda_1 - \lambda_2| \leq \delta \quad (6)$$

Tomemos cualquier $h \in \mathbb{R}$ con $|h| \leq \delta$, $h \neq 0$. El teorema del valor medio asegura que para cada $x \in I$ hay un cierto λ_x en el intervalo delimitado por λ y $\lambda + h$ tal que

$$\frac{1}{h}(f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda)) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_x)$$

y esto nos permite probar que el límite que define la derivada de f con respecto a λ es uniforme:

$$\left| \frac{1}{h}(f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda)) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_x) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \overset{(6)}{\leq} \frac{\epsilon}{|I|}.$$

Entonces, como $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es también integrable en I (ya que es continua), estamos en condición de probar que el límite de la derivada existe y es el esperado:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{h} \left(\int_I f(x, \lambda + h)\, dx - \int_I f(x, \lambda)\, dx \right) - \int_I \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx \right| \\
&\qquad = \left| \int_I \left(\frac{1}{h} \left(f(x, \lambda + h)\, dx - f(x, \lambda) \right) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right) dx \right| \\
&\qquad \leq \int_I \left| \frac{1}{h} \left(f(x, \lambda + h)\, dx - f(x, \lambda) \right) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| dx \leq \int_I \frac{\epsilon}{|I|}\, dx = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por definición de derivada se cumple (7).

Falta comprobar que la derivada es continua. Sea $\lambda \in J$ cualquiera, y dado $\epsilon > 0$ elijamos $d, \delta > 0$ igual que en (6). Entonces para $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_I \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx - \int_I \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h)\, dx \right| \\
&\qquad \leq \int_I \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h) \right| dx \leq \int_I \frac{\epsilon}{|I|}\, dx = \epsilon,
\end{aligned}$$

luego la derivada es efectivamente continua. $\square$

2.1. Regla de derivación de Leibniz

Lema 2.4. *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I compacto y J abierto. Sea $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x, \cdot)$ es derivable en J para todo $x \in I$. Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es continua en $I \times J$.*

Fijemos $t_0 \in I$. Entonces, la función

$$\begin{aligned} G : I \times J &\to \mathbb{R} \\ (t, \lambda) &\mapsto \int_{t_0}^{t} f(x, \lambda)\, dx \end{aligned}$$

es derivable en el sentido de Fréchet en cualquier punto del interior de $I \times J$.

Demostración. Calculemos las derivadas parciales de G y veamos que son continuas; entonces, resultados usuales prueban que G es Fréchet derivable en los puntos interiores. El teorema fundamental del cálculo dice que para $(t, \lambda) \in I \times J$,

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} f(x, \lambda)\, dx = f(t, \lambda),$$

una función continua. Por otro lado, la función f está en las hipótesis del teorema 2.1 en cualquier conjunto $[t_0, t] \times J$ con $t \in I$, luego G tiene derivada parcial con respecto a λ y

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{t_0}^{t} f(x, \lambda)\, dx = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx$$

(observar que se cumple sin importar si t es mayor o menor que t_0). Veamos que esta función es continua en $I \times J$. Sea $(t, \lambda) \in I \times J$, y $\epsilon > 0$. Elijamos $\delta > 0$ tal que $[\lambda - \delta, \lambda + \delta] \subseteq J$ y para todo h con $|h| < \delta$,

$$\int_I \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h) \right| dx < \frac{\epsilon}{2}$$

(sabemos que esto puede hacerse; ver final de la demostración de 2.1). Elijamos también una cota $M > 0$ de f en el compacto $I \times [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$. Entonces, para $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|h_1| \leq \frac{\epsilon}{2M}$, $|h_2| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx - \int_{t_0}^{t+h_1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h_2)\, dx \right| \\ &\qquad \leq \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h_2) \right| dx + \left| \int_{t+h_1}^{t} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h_2)\, dx \right| \\ &\qquad\qquad \leq \int_I \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + h_2) \right| dx + |h_1|\, M \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.5 (Regla de derivación de Leibniz)**.** *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I compacto y J abierto. Sea $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua en $I \times J$ tal que $f(x, \cdot)$ es derivable en J para todo $x \in I$. Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es continua en $I \times J$.*

Sea $t_0 \in I$ y $g : J \to I$ una función derivable. Entonces,

- $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, \lambda)$ *es integrable para todo* $\lambda \in J$
- $\int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x, \lambda)\, dx$ *es derivable en* J *para todo* $x \in I$

y se cumple la regla de derivación de Leibniz,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x, \lambda)\, dx = f(g(\lambda), \lambda)\, g'(\lambda) + \int_{t_0}^{g(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx \quad \forall\, \lambda \in J \tag{7}$$

Demostración. La función $\lambda \mapsto \int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x, \lambda)\, dx$ no es más que la composición de la función G del lema anterior con la función

$$\begin{aligned} F : J &\to I \times J \\ \lambda &\mapsto (g(\lambda), \lambda). \end{aligned}$$

La regla de la cadena usual demuestra entonces el resultado. □

3. Versión para la integral de Lebesgue

3.1. Primera versión

La principal dificultad en la demostración anterior es justificar el paso al límite de la integral. La función es derivable, y el límite usual converge puntualmente a su derivada, pero ¿justifica eso la convergencia de las integrales?. No en general, desde luego. Una de las ventajas que siempre se mencionan de la integral de Lebesgue sobre la de Riemann es que los teoremas de convergencia son más generales. Si consideramos las integrales anteriores como integrales de Lebesgue podemos intentar aplicar el teorema de la convergencia dominada en lugar de buscar una convergencia uniforme. De hecho, teniendo en cuenta la convergencia puntual dentro de la integral en (3) y la igualdad (4), bastaría con exigir que $\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \le m(x)$ para todo (x, λ) y cierta función m integrable. Ésta es la idea fundamental; el enunciado del resultado y su demostración son consecuencias de ella. Ni siquiera hace falta usar el teorema del valor medio, con lo que la diferenciabilidad que se requiere es ligeramente más débil: en su lugar, podemos escribir

$$\frac{1}{h}(f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda)) = \frac{1}{h} \int_{\lambda}^{\lambda + h} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, s)\, ds,$$

lo que nos permitirá probar que la convergencia es dominada de forma muy parecida.

Dado que la integral de Lebesgue se define en circunstancias más generales es natural enunciar el teorema integrando sobre un espacio de medida cualquiera en lugar de un intervalo. El resultado es el siguiente:

Teorema 3.1. *Sea J un intervalo real y $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $f : \Omega \times J \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *$f(x, \cdot)$ es absolutamente continua en J para casi todo $x \in \Omega$*
2. *Para todo $\lambda \in J$, existe $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ para casi todo $x \in \Omega$*
3. *$f(\cdot, \lambda)$ es integrable en Ω para todo $\lambda \in J$.*

En particular, estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda)$ está definida en casi todo $(x, \lambda) \in \Omega \times J$. Supongamos que existe una función m, integrable en Ω, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \leq m(x) \quad \forall\, (x, \lambda) \in J \times \Omega \text{ donde } \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \text{ esté definida.} \tag{8}$$

Entonces

- *$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, \lambda)$ es integrable en Ω para todo $\lambda \in J$,*
- *$\int_\Omega f(x, \lambda)\, dx$ es derivable en J*

y se cumple

$$\frac{d}{d\lambda} \int_\Omega f(x, \lambda)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx \quad \forall\, \lambda \in J.$$

Observación 3.2. Si vemos f como una función distinta para cada valor del parámetro λ, la derivabilidad que se le pide a f significa que esta función cambia de forma derivable con λ en casi todos sus puntos. Las dos primeras condiciones sobre f se cumplen en particular si, para todo $x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ es derivable con derivada integrable en J. Obsérvese también que la condición 1 del teorema implica que para *casi todo* λ, existe $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ para casi todo x, lo cual es ligeramente más débil que la condición 2.

Demostración. Fijemos $\lambda \in J$ cualquiera. La condición 2 sobre f asegura que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existe en casi todo $x \in \Omega$, y dado que

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda)\right) \quad \text{para casi todo } x \in \Omega,$$

dicha parcial es límite puntual c.p.d. de funciones medibles en Ω y es por tanto medible en Ω. Su cota m asegura que es además integrable en Ω. Podemos usar el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue para cualquier x para el que $f(x,\cdot)$ sea absolutamente continua (por la condición 1, para casi todo x):

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}(f(x,\lambda+h)-f(x,\lambda))\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_{\lambda}^{\lambda+h}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,s)\,ds\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\left|\int_{\lambda}^{\lambda+h}\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,s)\right|\,ds\right| \leq \frac{1}{h}\left|\int_{\lambda}^{\lambda+h} m(x)\,ds\right| = m(x),\end{aligned}$$

y vemos que la convergencia puntual está dominada por m. Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\lambda}\int_{\Omega} f(x,\lambda)\,dx \\ &\qquad = \lim_{h\to 0}\int_{\Omega}\frac{1}{h}(f(x,\lambda+h)-f(x,\lambda))\,dx \overset{TCD}{=} \int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\,dx \qquad \forall\,\lambda\in J.\end{aligned}$$

□

3.2. Segunda versión

Si en lugar de buscar la derivada en todo punto usamos el concepto de derivada que va asociado de forma natural a la integral de Lebesgue por medio del teorema fundamental del cálculo, el enunciado de derivación bajo la integral se convierte en un enunciado sobre el intercambio del orden de las integrales. En este caso el resultado es ligeramente más débil, como lo son también las condiciones. En esencia, podemos quitar la condición 2 del teorema anterior si estamos dispuestos a aceptar derivabilidad sólo en casi todo punto:

Teorema 3.3. *Sea J un intervalo real (en el que usaremos siempre la medida usual de Lebesgue) y $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida. Sea $f:\Omega\times J\to\mathbb{R}$ tal que*

- *$f(x,\cdot)$ es absolutamente continua en J para casi todo $x\in\Omega$*
- *$f(\cdot,\lambda)$ es medible en Ω para casi todo $\lambda\in J$, y es integrable para al menos un cierto $\lambda_0\in J$.*

Estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda)$ está definida en casi todo $(x,\lambda)\in\Omega\times J$. Supongamos que existe una función m, integrable en Ω, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right| \leq m(x) \quad \forall\,(x,\lambda)\in J\times\Omega \text{ donde } \frac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda) \text{ esté definida.} \tag{9}$$

Entonces

- *$f(\cdot,\lambda)$ es integrable para todo $\lambda\in J$,*

- $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ *es integrable en* $\Omega \times \tilde{J}$ *para cualquier* $\tilde{J} \subseteq J$ *compacto (en particular, es integrable en* x *para casi todo* λ*),*

- $\int_\Omega f(x,\lambda)\,dx$ *es absolutamente continua en* J

y se cumple

$$\frac{d}{d\lambda}\int_\Omega f(x,\lambda)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx \qquad p.c.t.\ \lambda \in J.$$

Observación 3.4. Las integrales del teorema anterior se entienden en el sentido de Lebesgue. Notemos que en este caso la última igualdad se tiene sólo en casi todo punto, a diferencia de los teoremas anteriores.

Observación 3.5. La condición (11) puede sustituirse por la siguiente condición más débil:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda) \text{ es integrable en cualquier } \Omega \times \tilde{J} \text{ con } \tilde{J} \subseteq J \text{ compacto.}$$

La demostración puede hacerse de la misma forma, ya que (11) sólo se usa para deducir precisamente esto. No he incluido esta condición en el enunciado simplemente porque es menos común encontrarla en los libros de análisis.

Lema 3.6. *Sea* J *un intervalo real y* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Sea* $f : \Omega \times J \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $f(\cdot,\lambda)$ *es medible para casi todo* $\lambda \in J$ *fijo*

- $f(x,\cdot)$ *es continua para casi todo* $x \in \Omega$ *fijo*

Entonces f *es medible en* $\Omega \times J$*.*

Demostración. Para hacer la demostración podemos suponer que $J = [a,b]$, ya que el que f sea medible en $\Omega \times J$ equivale a que lo sea en en todo $\Omega \times \tilde{J}$ con $\tilde{J} \subseteq J$ un subintervalo compacto.

Dado n natural, dividimos el intervalo $J = [a,b]$ en n intervalos iguales

$$J_n^i = [a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)[\quad \text{para } i = 1, \dots, n-1$$
$$J_n^n = [a + \frac{n-1}{n}(b-a), b]$$

y elegimos puntos $\lambda_n^i \in J_n^i$ tales que $f(\cdot,\lambda_n^i)$ es medible. Definimos la función $f_n : \Omega \times J \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x,\lambda) = f(x,\lambda_n^i) \qquad \forall\, \lambda \in J_n^i$$

que es medible en $\Omega \times J$ porque lo es en cada $\Omega \times J_n^i$. La sucesión de funciones f_n converge puntualmente a f en casi todo punto de $\Omega \times J$ (de hecho, converge en todo punto (x,λ) tal que $f(x,\cdot)$ es continua), luego f es medible. □

Demostración del teorema. Donde $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ está definida,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)\right),$$

un límite puntual de funciones medibles en $\Omega \times J$ (por el lema anterior), así que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es medible en $\Omega \times J$. La cota (11) nos permite asegurar que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es integrable en $\Omega \times \tilde{J}$ para cualquier $\tilde{J}$ compacto contenido en J. Sea $\lambda \in J$. Por el teorema de Fubini podemos calcular sus integrales iteradas en cualquier orden en el conjunto $\Omega \times [\lambda, \lambda_0]$ y obtener que

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,s)\, dx\, ds = \int_{\Omega} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,s)\, ds\, dx. \tag{10}$$

Para cualquier $x \in \Omega$ para el que $f(x,\lambda)$ es absolutamente continua (en particular, para casi todo $x \in \Omega$) el teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,s)\, ds = f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0).$$

Tanto el miembro izquierdo como $f(x,\lambda_0)$ son integrables en Ω, luego $f(x,\lambda)$ es integrable en Ω para todo $\lambda \in J$ y deducimos de (10) que

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,s)\, dx\, ds = \int_{\Omega} f(x,\lambda)\, dx - \int_{\Omega} f(x,\lambda_0)\, dx \quad \forall\, \lambda \in J$$

De nuevo por el teorema fundamental del cálculo, esto es equivalente a que $\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,s)\, dx$ sea absolutamente continua y que se cumpla

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\Omega} f(x,\lambda)\, dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, dx \quad \text{para casi todo } \lambda \in J$$

□

3.3. Regla de derivación de Leibniz, segunda versión

Aquí incluyo una versión un tanto incompleta de la regla de Leibniz que exige condiciones más débiles sobre la función (de hecho, las mismas que las del teorema anterior). Es incompleta porque no incluye una función cualquiera en los límites de la integral. Sin embargo, la he incluido porque me resultaba útil en otro contexto.

La demostración es directa: no usa la derivación bajo la integral como en el caso clásico, sino que más bien generaliza la forma de la prueba anterior. No sé si es posible obtener un resultado del tipo del lema 2.4 ni qué tipo de regularidad tiene la función G definida en dicho lema en este caso.

Teorema 3.7 (Regla de derivación de Leibniz, segunda versión)**.** *Sea J un intervalo real no trivial. Sea $f : J \times J \to \mathbb{R}$ una función tal que*

- *$f(\cdot, \lambda)$ es medible en J para casi todo $\lambda \in J$, y es integrable para al menos un cierto $\lambda_0 \in J$.*
- *$f(x, \cdot)$ es absolutamente continua en J para casi todo $x \in J$.*

Estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda)$ está definida en casi todo $(x, \lambda) \in J \times J$. Supongamos que existe una función m, integrable en J, tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leq m(x) \quad \forall\, (x, \lambda) \in J \times J \text{ donde } \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \text{ esté definida.} \tag{11}$$

Sea $t_0 \in J$. Entonces,

- *$f(\cdot, \lambda)$ es integrable para todo $\lambda \in J$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es integrable en $J \times \tilde{J}$ para cualquier $\tilde{J} \subseteq J$ compacto (en particular, es integrable en x para casi todo λ),*
- *$\int_{t_0}^{\lambda} f(x, \lambda)\, dx$ es absolutamente continua en J,*

y se cumple la regla de derivación bajo la integral,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{t_0}^{\lambda} f(x, \lambda)\, dx = f(\lambda, \lambda) + \int_{t_0}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx \quad \text{p.c.t. } \lambda \in J. \tag{12}$$

Demostración del teorema. Todas las afirmaciones salvo la última son parte del teorema 3.3. Probar que $\int_{t_0}^{\lambda} f(x, \lambda)\, dx$ es absolutamente continua y que su derivada es la que se dice es equivalente, por el teorema fundamental del cálculo, a probar la correspondiente igualdad integral. Para cualquier $t_1 \in I$, integremos el segundo término de la suma en (12) (que es integrable gracias al segundo punto de la conclusión y al teorema de Fubini) entre t_0 y t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, \lambda)\, ds\, d\lambda = \int_{t_0}^{t_1} \int_{s}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, \lambda)\, d\lambda\, ds = \int_{t_0}^{t_1} (f(s, t_1) - f(s, s))\, ds,$$

donde en el primer paso hemos cambiado el orden de integración teniendo en cuenta el conjunto en el que se integra. Esta aplicación del teorema de Fubini prueba que $\int_{s}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, \lambda)\, d\lambda$ es integrable en s, y como $f(s, t_1)$ es integrable en s, la igualdad

$$\int_{s}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, \lambda)\, d\lambda = f(s, t_1) - f(s, s)$$

prueba que $f(s, s)$ es integrable en s. Podemos entonces integrar el miembro derecho de (12) y obtener

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} f(\lambda, \lambda)\, d\lambda + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, \lambda)\, ds\, d\lambda \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t_1} f(\lambda, \lambda)\, d\lambda + \int_{t_0}^{t_1} (f(s, t_1) - f(s, s))\, ds = \int_{t_0}^{t_1} f(s, t_1)\, ds. \end{aligned}$$

Esta es la forma integral de la afirmación (12), que se obtiene derivando respecto a t_1 los miembros primero y último de esta igualdad. □

4. Sobre este texto

Para comentarios escribe a José Alfredo Cañizo <canizo@mat.uab.cat>. Son útiles, en particular, correcciones de errores o sugerencias sobre ampliaciones de los resultados. Puedes encontrar la última versión de este documento en

`http://www.mat.uab.cat/~canizo/tex/`

Referencias

[1] Talvila, Erik, *Some divergent trigonometric integrals.* Amer. Math. Monthly 108 (2001), no. 5, 432–436. [arXiv:math.CA/0101011]

[2] Talvila, Erik, *Necessary and sufficient conditions for differentiating under the integral sign.* Amer. Math. Monthly 108 (2001), no. 6, 544–548. [arXiv:math.CA/0101012]

[3] Richard Courant y Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis, Volume II/2.* Springer, 2000