УДК 512.553+514.114

ИДЕМПОТЕНТНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В КОНЕЧНОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ[1]

С. Н. Сергеев

В данной заметке излагаются иденпотентные аналоги некоторых теорем конечномерной выпуклой геометрии.

Одним из проявлений идемпотентного принципа соответствия [1] является то, что у ряда конструкций и результатов выпуклой геометрии [2–4] есть аналоги в идемпотентной математике. Этот принцип лежит в основе ряда работ [5–13], в которых исследуются свойства идемпотентных пространств и идемпотентно выпуклых множеств. В данной заметке излагаются идемпотентные аналоги теорем Каратеодори, Минковского, Радона и Хелли, а также идемпотентные версии теорем отделимости замкнутых идемпотентно выпуклых множеств в пространствах $\mathbb{R}^n_{\mathrm{max,m}}$ с евклидовой топологией. Идемпотентное полуполе $\mathbb{R}_{\mathrm{max,m}}$ описано в статье [6] настоящего сборника, см. пример 4.2.

1. Идемпотентная выпуклость. Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n_{\mathrm{max,m}}$ называется *идемпотентно выпуклым*, если для любых двух элементов $x, y \in C$ и любых двух скаляров λ, μ, удовлетворяющих $\lambda \oplus \mu = 1$, их *идемпотентно выпуклая комбинация* $\lambda x \oplus \mu y$ принадлежит C. Идемпотентным аналогом выпуклого конуса является идемпотентное подпространство. Отметим, что если K — идемпотентное подпространство $\mathbb{R}^{n+1}_{\mathrm{max,m}}$, то его сечение по любой плоскости $x_i = \mathrm{const}$ является идемпотентно выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n_{\mathrm{max,m}}$. Наоборот, если C — идемпотентно выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n_{\mathrm{max,m}}$, то множество

$$K = \{(\lambda x, \lambda) : x \in C,\ \lambda \in \mathbb{R}_{\mathrm{max,m}}\}$$

является идемпотентным подпространством $\mathbb{R}^{n+1}_{\mathrm{max,m}}$. Это аналог известного соответствия между выпуклыми конусами и выпуклыми множествами.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 05-01-02807-НЦНИЛ_а, 08-01-00601-а и гранта EPSRC RRAH12809.

Идемпотентно выпуклой оболочкой множества S называется множество всех идемпотентно выпуклых комбинаций элементов из S. Элемент z идемпотентно выпуклого множества C называется *крайним*, если из $z = \lambda x \oplus \mu y$, $x, y \in C$ следует, что $z = x$ или $z = y$.

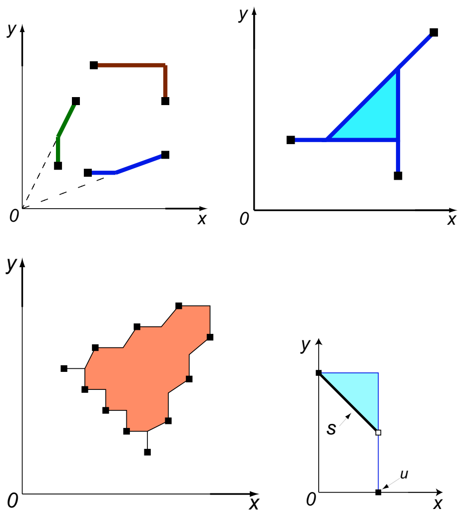

Рис. 1. Идемпотентно выпуклые множества на плоскости $\mathbb{R}^2_{\mathrm{max,m}}$.

На рис. 1 приведены некоторые примеры идемпотентно выпуклых множеств на плоскости $\mathbb{R}^2_{\mathrm{max,m}}$. Первый пример (слева вверху) — это «идемпотентные отрезки», то есть идемпотентно выпуклые оболочки двух точек. Далее изображены «треугольник»(справа вверху), «многоугольник» (слева внизу) и выпуклая оболочка бесконечного множества точек ($S \cup \{u\}$, справа внизу). Крайние точки отрезков треугольника и многоугольника обозначены квадратиками.

2. Теоремы об идемпотентно выпуклых множествах. Следующие результаты являются аналогами известных теорем о выпуклых множествах в конечномерных пространствах (см., например, [2, разд. 3.2]).

Теорема 1 (Каратеодори)[8, 10]**.** *Пусть идемпотентно выпуклое множество C порождается множеством $S \subseteq \mathbb{R}^n_{\mathrm{max},m}$. Тогда любой элемент C является линейной комбинацией не более чем $n+1$ элементов S.*

Теорема 2 (Минковского) [8, 11]. *Если множество $C \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,m}$ идемпотентно выпукло и компактно, то оно является идемпотентно выпуклой оболочкой своих крайних элементов.*

Доказательство теорем 1 и 2 не похоже на доказательство теорем Каратеодори и Минковского в «традиционной» выпуклой геометрии. Оно основано на том наблюдении, что крайние элементы идемпотентно выпуклых множеств являются минимумами по некоторому отношению частичного порядка [8]. Это наблюдение также позволяет оценить вычислительную сложность задачи нахождения крайних элементов, с использованием результатов [11, разд. 4.1.3]. Отметим, что в вычислительном плане эта задача намного легче задачи на поиск крайних элементов выпуклых множеств в «традиционном» выпуклом анализе.

Теорема 3 [8]. *Если множество $C \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,m}$ является идемпотентно выпуклой оболочкой k элементов, то вычислительная сложность задачи о нахождении крайних элементов C не превосходит $O(k\log_2 k)$ при $n = 2$ и $O(k(\log_2 k)^{(n-2)})$ при $n > 2$.*

В идемпотентной геометрии есть также аналог леммы Радона.

Теорема 4 (Радона) [7]. *Пусть $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n_{\max,m}$ и $m > n+1$. Тогда существует разбиение множества $x^1, \ldots, x^m$ на два непересекающиеся подмножества, такие, что их идемпотентно выпуклые оболочки пересекаются.*

С. Гобер и Ф. Менье [12] заметили, что с помощью стандартного рассуждения Радона (см., например, [2, 4]) отсюда выводится идемпотентный аналог теоремы Хелли. Другое доказательство идемпотентной теоремы Хелли содержится в [13].

Теорема 5 (Хелли) [12, 13]. *Пусть $\{C_i,\ i \in I\}$ — это совокупность $|I| \geqslant n+1$ идемпотентно выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n_{\max,m}$, по крайней мере одно из которых компактно. Если любые $n+1$ множеств этой совокупности имеют непустое пересечение, то и вся совокупность в целом также имеет непустое пересечение.*

3. Теоремы отделимости. Аналогом замкнутого полупространства в идемпотентной геометрии является множество вида

$$H = \left\{ y\colon \bigoplus_{i=1}^{n} a_i^{-1} y_i \oplus \alpha \geqslant \bigoplus_{i=1}^{n} c_i^{-1} y_i \oplus \gamma \right\}. \tag{1}$$

Приводимый ниже результат был доказан К. Циммерманном [14], см. также [9, 10, 13]. Он может быть получен как следствие идемпотентного аналога теоремы Хана — Банаха [5].

Теорема 6 [14]**.** *Пусть идемпотентно выпуклое множество* $C \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,m}$ *замкнуто и пусть элемент* x *не принадлежит* C. *Тогда существует замкнутое полупространство вида* (1), *содержащее* C *и не содержащее* x.

Результат теоремы 6 можно усилить.

Теорема 7 [13]**.** *Пусть* $C_1, \ldots, C_m$ *— идемпотентно выпуклые множества в* $\mathbb{R}^n_{\max,m}$, *хотя бы одно из которых компактно. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\bigcap_{l=1}^m C_i = \varnothing$;

(2) *существуют полупространства* $H_1, \ldots, H_m$ *такие, что* $C_i \subseteq H_i$ *для всех* $i = 1, \ldots, m$ *и* $\bigcap_{i=1}^m H_i = \varnothing$. По поводу аналога теоремы 7 в выпуклом анализе см. [4, с. 39–40].

Литература

1. *Litvinov G. L., Maslov V. P.* Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications // Idempotency. Publ. of the I. Newton Institute.—1998.—Vol. 11—P. 420–443.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения.—М.: УРСС, 2000.—176 с.
3. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение.—М.: Мир, 1989.—478 с.—(Пер. с англ.)
4. *Eggleston H. G.* Convexity // Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics.—Cambridge univ. press, 1958.—Vol. 47.
5. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Мат. заметки.—2001.—Т. 69, № 5.—С. 758–797.
6. *Литвинов Г. Л., Шпиз Г. Б.* Деквантование Маслова и выпуклость // Выпуклый анализ.—2009.—В печати.
7. *Butkovič P.* Max-algebra: the linear algebra of combinatorics? // Linear Algebra Appl.—2003.—Vol. 367.—P. 313–335.
8. *Butkovič P., Schneider H., Sergeev S.* Generators, extremals and bases of max cones // Linear Algebra Appl.—2007.—Vol. 421.—P. 394–406.
9. *Cohen G., Gaubert S., Quadrat J.-P., Singer I.* Max-plus convex sets and functions // Idempotent mathematics and mathematical physics, Contemporary Math.—2005.—Vol. 377.—P. 105–129.
10. *Develin M., Sturmfels B.* Tropical convexity // Documenta Math.—2004.—Vol. 9.—P. 1–27.
11. *Gaubert S., Katz R.* The Minkowski theorem for max-plus convex sets // Linear Algebra Appl.—2007.—Vol. 421.—P. 356–369.
12. *Gaubert S., Meunier F.* Unpublished.—2007; Preprint (arXiv: 0804.1361).

13. *Гобер С., Сергеев S.* Циклические проекторы и теоремы отделимости в идемпотентных полумодулях // Фунд. и прикл. мат.—2007.—Т. 13, вып. 4.—С. 31–52.
14. *Zimmermann K.* A general separation theorem in extremal algebras // Ekonomicko-Matematický Obzor.—1977.—Vol. 13, № 2.—P. 179–210.

Сергеев Сергей Николаевич
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Россия, 119002 индекс, Москва,
Большой Власьевский переулок, 11
E-mail: sergiej@gmail.com

IDEMPOTENT CONVEXITY IN FINITE DIMENSIONAL GEOMETRY.

Sergeev S. N.

In this note we consider idempotent analogues of some theorems of finite dimensional geometry.