

**ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ СЕТКИ
НА ТОЧНОСТЬ РЕКОНСТРУКЦИИ РЕШЕНИЯ
В КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫХ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ
СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

© 2010 г. *Н.Б. Петровская, А.В. Волков*

University of Birmingham, United Kingdom

Центральный аэрогидродинамический институт; e-mail: andrey.wolkov@mail.ru

В работе рассмотрено влияние геометрии сетки на точность схемы высокого порядка. Точность аппроксимации исследована на неструктурированных сетках, ячейки которых близки к вырожденным. Будет показано, что схемы высокого порядка, которые требуют расширенного шаблона аппроксимации, более чувствительны к деформации сетки, чем те схемы, которые требуют компактного шаблона.

Ключевые слова: геометрия сетки, схемы высокого порядка, метод конечного объёма, метод конечного элемента

**THE IMPACT OF GRID GEOMETRY ON THE ACCURACY
OF HIGHER ORDER FINITE-VOLUME
AND FINITE ELEMENT SCHEMES**

N.B. Petrovskaya, A.V. Wolkov

We discuss the issues of a higher-order finite-volume and finite-element discretization on anisotropic grids. It will be shown that high order finite-volume schemes are inferior to finite-element schemes in terms of accuracy when stretched meshes are considered. The poor accuracy of finite-volume schemes is discussed based on the idea of numerically distant points that are present in a reconstruction stencil on stretched meshes.

1. Введение

Методы вычислительной аэродинамики получили широкое признание в качестве надёжного и эффективного средства для дизайна и анализа аэродинамических конфигураций [1, 2, 3]. Тем не менее, сложность современных аэродинамических задач требует развития новых методов, в то время как быстрое развитие вычислительной техники заставляет исследователей и разработчиков пересмотреть требования, предъявляемые к компьютерным программам. В настоящее время численные схемы высокого порядка, ранее не использовавшиеся в вычислительной аэродинамике, рассматриваются как потенциально более эффективная альтернатива существующим подходам [4, 5].

Применение схем высокого порядка в задачах вычислительной аэродинамики должно позволить существенно снизить вычислительные затраты и получить более высокую точность вычислений. Однако, несмотря на теоретические преимущества таких схем, до сих пор не удавалось использовать их для промышленных инженерных расчетов [6]. В настоящее время большинство компьютерных программ используют численные схемы второго порядка точности, т.к. свойства схем высокого порядка всё ещё не изучены полностью для комплексных задач современной аэродинамики.

Конечно-объемные методы [7] являются на сегодняшний день основным подходом, используемым для индустриальных аэродинамических расчетов. Определение конечно-объемного метода высокого порядка требует расширенного шаблона схемы, т.е. использования информации из соседних ячеек сетки для аппроксимации в данной ячейке. Это связано с тем, что увеличение порядка схемы приводит к необходимости более точной аппроксимации градиента (и более высоких производных, которые могут требоваться для определения численного решения в схеме высокого порядка), что, в свою очередь, требует увеличения числа точек шаблона. Реконструкция градиента производится по теореме Гаусса или методом наименьших квадратов [8]. Оба этих метода позволяют вычислить градиент в нужной точке локально, без увеличения общего числа неизвестных в задаче [9].

Альтернативой конечно-объемным методам на неструктурированных сетках являются методы конечных элементов [5, 10]. Конечно-элементные методы, такие как разрывный метод Галеркина [11, 12] или противопотоковая схема Петрова-Галеркина [13], получили в последнее время широкое распространение. В отличие от конечно-объемных схем, методы конечных элементов обычно требуют компактного шаблона (одна ячейка сетки) для дискретизации уравнений исходной задачи.

В настоящее время вопрос о применении конечно-элементных методов высокого порядка в индустриальных расчётах остаётся открытым, так как конечно-объемные схемы обладают рядом достоинств, которые делают их более привлекательными для промышленных задач. Одним из аргументов в пользу конечно-объемных методов является то, что число неизвестных в конечно-объемной схеме высокого порядка меньше, чем в аналогичной конечно-элементной схеме. Локальная реконструкция градиента не увеличивает размерность матрицы дискретизации, так как число неизвестных в каждой ячейке сетки остаётся фиксированным. В то же время, использование конечно-элементного метода высокого порядка приводит к увеличению числа неизвестных (степеней свободы) в задаче и, как следствие, к существенному увеличению времени расчёта.

Между тем, серьёзным преимуществом конечно-элементного метода является использование компактного шаблона дискретизации, что делает метод менее чувствительным к геометрии ячеек сетки. Преимущества компактного шаблона обсуждались в работе [14], в которой была разработана реконструкция высокого порядка на компактном шаблоне для численного решения уравнений Эйлера. В дальнейшей работе [15] результаты, полученные на компактном шаблоне, сравнивались с аналогичными расчетами на расширенном шаблоне и было показано, что использование компактного шаблона приводит к более точному решению. Результаты работ [14, 15], тем не менее, не дают окончательного ответа о преимуществе компактного шаблона дискретизации над расширенным шаблоном, поскольку они были получены на сетках с регулярной геометрией ячеек, где возможно увеличение точности локальной реконструкции, используемой в конечно-объемных схемах, за счет повышения порядка полинома реконструкции. Необходимо дальнейшее исследование этой проблемы, где должна быть рассмотрена способность той или иной схемы высокого порядка воспроизводить решение с заданным порядком точности на неструктурированных сетках с нерегулярной геометрией ячеек сетки.

Неструктурированные сетки широко используются в вычислительной аэродинамике, т.к. их относительно просто построить в областях сложной геометрической

формы, например, вблизи криволинейной границы [16], [17], [18]. Более того, всё большее внимание уделяется построению адаптивных неструктурированных сеток для расчетов различных аэродинамических конфигураций. Адаптивные алгоритмы, приводящие к измельчению сетки только в тех областях, где решение обладает большим градиентом, в большинстве случаев экономят вычислительные ресурсы и повышают скорость сходимости приближенного решения [19], [20]. В то же время хорошо известно, что построение сетки и особенно её адаптация к решению аэродинамической задачи может привести к сеточным подобластям, где ячейки сетки близки к вырожденным. Например, построение сетки в пограничном слое неизбежно приводит к образованию ячеек, сильно вытянутых вдоль границы тела в пограничном слое [21]. Это, в свою очередь, может влиять на качество приближенного решения, приводя к медленной сходимости или расходимости нелинейных итераций в задаче, если численная схема оказывается чувствительной к такой геометрии ячеек сетки (см., например, [22]). Таким образом, изучение влияния геометрии сетки на результаты дискретизации высокого порядка необходимо для того, чтобы сделать выводы о том, какая дискретизация является более подходящей для применения в индустриальных задачах.

В настоящей работе мы рассматриваем анизотропные неструктурированные сетки для того, чтобы сравнить результаты реконструкции на расширенном шаблоне, который требуется в конечно-объемных схемах высокого порядка, с реконструкцией на компактном шаблоне. Мы обсуждаем несколько простых численных экспериментов, которые демонстрируют, что компактный шаблон, используемый для реконструкции в конечно-элементной схеме, менее чувствителен к геометрии сетки, чем схема на расширенном шаблоне. Будет показано, что аппроксимация градиента с помощью метода наименьших квадратов на сильно вытянутых нерегулярных сетках приводит к его недостоверным значениям, что может сильно ухудшить результаты численного решения задачи. Таким образом, точность вычисления градиента зависит от геометрии ячеек сетки, и при рассмотрении конечно-объемной схемы на вытянутых сетках можно ожидать большую ошибку аппроксимации. Более того, увеличение порядка полинома для локальной реконструкции градиента не улучшает аппроксимацию, как это происходит на сетках с регулярной геометрией ячеек, а наоборот приводит к ухудшению точности решения. Этот результат, полученный в нашей работе, демонстрирует преимущество конечно-элементных методов на анизотропных сетках.

2. Аппроксимация решения на расширенном и компактном шаблоне

В этом разделе мы приводим краткую формулировку конечно-объемного метода и конечно-элементного метода (разрывного метода Галеркина), чтобы объяснить проблему реконструкции на расширенном и компактном шаблонах. Более подробное описание этих методов может быть найдено в работах [7, 10].

Рассмотрим двумерную область D , и пусть в D численно решается уравнение вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F(U) = 0 \quad (1)$$

для функции $U(x, y, t)$, где $F(U)$ - поток переменной U . Для нашей задачи важна только пространственная дискретизация уравнения (1), и мы не обсуждаем как интегрировать по времени полученные в результате выбранной нами дискретизации уравнения (этот вопрос детально изложен в [7]). Для пространственной дискретизации мы предполагаем наличие граничных условий, которые позволяют численно решать краевую задачу в области D , но которые, однако, несущественны для дискуссии в этом разделе. Мы также предполагаем, что для численного решения задачи (1) в области D построена неструктурированная сетка с ячейками e_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Общая формулировка конечно-объемного метода для уравнения (1) требует интегрирования этого уравнения в контрольном объеме v_i , построенном для каждой ячейки расчетной сетки:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_i} U da + \oint_{\partial v_i} F(U) ds = 0, \quad (2)$$

где $ds = \partial v_i \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ - единичный вектор внешней нормали к границе ∂v_i контрольного объема. При таком подходе возникает задача определения потока $F(U)$ на границах контрольных объемов, для чего решается задача Римана на каждом интерфейсе, образующем границу ∂v_i . При этом численный поток $F(u_L, u_R)$ на каждом интерфейсе будет зависеть от левого u_L и правого u_R значений решения на интерфейсе. Левое и правое значения решения на границе контрольного объема вычисляются как

$$u_L = u_i + (\nabla u)_i \mathbf{r}_{im}, \quad u_R = u_k + (\nabla u)_k \mathbf{r}_{km},$$

где u_i и u_k - значения решения в узлах сетки i и k , образующих интерфейс, на котором аппроксимируется поток, и \mathbf{r} есть единичный вектор в направлении от узла к середине интерфейса m .

Таким образом, определение схемы требует оценки градиента в узлах вычислительной сетки, для чего используется локальная реконструкция градиента методом наименьших квадратов (МНК). В дальнейшем мы предполагаем, что решение известно в узлах сетки, и для каждой точки выбран шаблон реконструкции, т.е. совокупность соседних узлов сетки, значения функции в которых используются для аппроксимации решения в заданной точке. Пусть, например, требуется определить значение градиента в точке P_0 , показанной на рис. 1. Тогда в шаблон реконструкции войдут все узлы $\{P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, которые принадлежат ребрам сетки с общей вершиной P_0 . Для реконструкции более высокого порядка, когда нужно оценить не только градиент, но и матрицу вторых производных, шаблон реконструкции также захватывает узлы, принадлежащие ребрам с общей вершиной в каждой из точек P_i (см. рис. 1).

Рассмотрим общую задачу реконструкции МНК для произвольной геометрии шаблона. Пусть вектор $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_N)$ есть набор значений функции $U(x, y)$ в точках шаблона (P_1, P_2, \dots, P_N) . Метод наименьших квадратов аппроксимирует $U(x, y)$ функцией

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^M u_m \phi_m(x, y), \quad M < N, \quad (3)$$

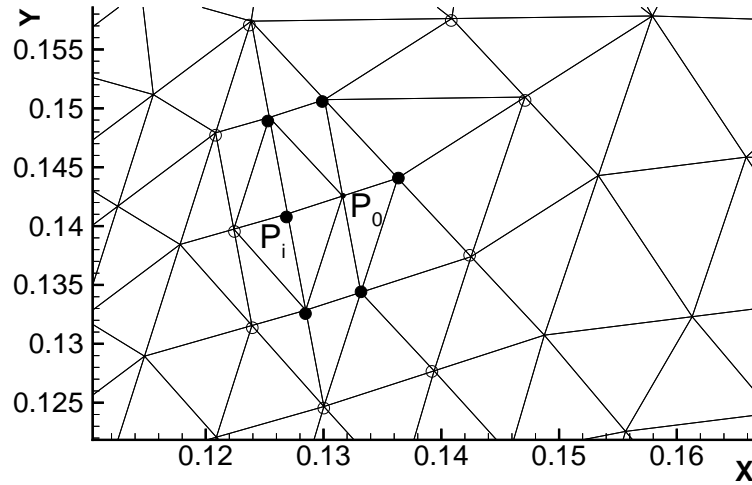


Рис. 1. Пример шаблона реконструкции МНК для восполнения градиента в точке P_0 на неструктурированной сетке. Шаблон реконструкции включает в себя узлы P_i ребер сетки, выходящих из точки P_0 (символы \bullet на рисунке). Следующий слой точек шаблона захватывает узлы ребер, выходящих из каждого узла первого слоя (символы \circ на рисунке).

где $\phi_m(x, y)$, $m = 0, \dots, M$ – базисные функции и (u_0, u_1, \dots, u_M) – коэффициенты разложения. Полиномиальные базисные функции $\phi_m(x, y)$ определены как

$$\phi_m(x, y) = (x - x_0)^{k_1} (y - y_0)^{k_2} \quad (4)$$

для значений $k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, K$, где K определяет наибольшую степень полинома в разложении (3). Для заданного значения K число базисных функций определяется как $M = (K + 1)(K + 2)/2$. Координаты (x_0, y_0) в разложении (4) – это координаты точки P_0 , в которой восстанавливается функция $u(x, y)$. Заметим, что базисные функции (4) определены для любых значений $(x, y) \in D$.

После того как выбраны базисные функции, вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)$ рассматривается как обеспечивающий наилучшее приближение к функции $U(x, y)$, если \mathbf{u} минимизирует следующую функцию F^2 :

$$F^2 = \sum_{i=1}^N \left[\left(U_i - \sum_{m=0}^M u_m \phi_m(P_i) \right) / \sigma_i \right]^2, \quad (5)$$

где параметры σ_i называются весами метода. Таким образом, коэффициенты разложения u_k могут быть найдены из $M + 1$ условий $\partial F / \partial u_k = 0$, $k = 0, \dots, M$, которые называются нормальными уравнениями задачи наименьших квадратов. Принимая во внимание определение (5), нормальные уравнения записывают в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[U_i - \sum_{j=0}^M u_j \phi_j(P_i) \right] \phi_m(P_i) = 0, \quad m = 0, \dots, M. \quad (6)$$

Определим взвешенные данные \mathbf{b} и матрицу $[D]$ как

$$b_i = U_i/\sigma_i, \quad D_{ij} = \phi_j(P_i)/\sigma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Тогда нормальные уравнения могут быть преобразованы как $[A] \mathbf{u} = \mathbf{r}$, где $[A] = [D]^T [D]$ и правая часть $\mathbf{r} = [D]^T \mathbf{b}$. Решением этой системы является вектор коэффициентов разложения $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_M)$,

$$\mathbf{u} = [A]^{-1} \mathbf{r}. \quad (7)$$

После того, как функция $u(x, y)$ восстановлена в точке P_0 , ее производные могут быть найдены непосредственно из разложения (3). Эти производные затем используются для реконструкции u_L и u_R в определении численного потока. Заметим, что более точное восполнение значений u_L и u_R требует знания матрицы вторых производных, что, как уже отмечалось, может привести к дальнейшему расширению шаблона реконструкции МНК в конечно-объемной схеме высокого порядка.

Другим способом реконструкции функции и её градиента в данной точке является решение уравнения (1) с заданными граничными условиями разрывным методом Галеркина (в дальнейшем РМГ), формулировка которого обеспечивает реконструкцию на компактном шаблоне. Этот конечно-элементный метод, описанный впервые в [23], был развит многими авторами применительно к различным приложениям (см. [12], в которой дан подробный обзор метода).

Рассмотрим произвольную неструктурированную сетку с ячейками e_i , $i = 1, 2, \dots, N$. РМГ определяет приближенное решение $u_h(x, y)$ в каждой ячейке сетки e_i как

$$u_h(x, y) = \sum_{m=0}^M u_m \phi_m(x, y), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad x, y \in e_i. \quad (8)$$

Несмотря на то, что разложение (8) по форме идентично разложению (3), полиномиальные базисные функции $\phi_m(x, y) = (x - x_{0i})^{k_1} (y - y_{0i})^{k_2}$, $k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, K$ теперь являются локальными, поскольку они определены только внутри ячейки e_i , и параметры x_{0i} и y_{0i} - это координаты центра данной ячейки.

В разрывном методе Галеркина приближенное решение ищется, исходя из условия ортогональности невязки метода функциям $\phi_m(x)$. Уравнение (1) умножают на функцию $\phi_l(x, y)$, $l = 0, 1, \dots, M$ и интегрируют по частям в каждой ячейке сетки. В полученные уравнения подставляют приближенное решение (8), что дает

$$\frac{d}{dt} \int_{e_i} u_h \phi_l da + \oint_{\partial e_i} F(u_L, u_R) \phi_l ds - \int_{e_i} F(u_h) \nabla \phi_l da = 0, \quad (9)$$

$$l = 0, 1, \dots, M,$$

где, аналогично аппроксимации (2), $d\mathbf{s} = \partial e_i \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ - единичный вектор внешней нормали к границе ∂e_i ячейки e_i . Так же как и в методе конечных объемов, решение разрывно на каждом сеточном интерфейсе, что приводит к наличию в уравнениях (9) численного потока $F(u_L, u_R)$. Однако теперь значения u_L и u_R

не требуют дополнительной аппроксимации МНК, так как они восстанавливаются непосредственно из разложения (8) для заданного показателя степени K полиномиального приближения. Как мы уже отмечали, в общем случае аппроксимация полиномом степени K в схеме высокого порядка требует $M = (K + 1)(K + 2)/2$ неизвестных (степеней свободы). В разрывном методе Галеркина все эти неизвестные определяются в ячейке e_i , что приводит к компактному шаблону аппроксимации. Иными словами, существенным отличием схемы (9) от схемы (2) является то, что увеличение порядка аппроксимации в РМГ не требует расширения шаблона, но увеличивает число степеней свободы в каждой ячейке сетки.

До настоящего времени локальная реконструкция градиента рассматривалась как преимущество метода конечных объемов, поскольку восполнение (3) не приводит к увеличению числа неизвестных в дискретных уравнениях (2), что делает схему более эффективной с точки зрения экономии вычислительных ресурсов. Между тем, окончательное решение о преимуществах той или иной схемы, используемой в вычислительной аэродинамике, может быть принято только после того, как вопрос о точности этой схемы будет исследован для расчетов существующих аэродинамических конфигураций. Одним из аспектов такого исследования является проверка численного метода на сильно вытянутых сетках, которые неизбежно возникают при решении аэродинамических задач. Таким образом, целью нашей работы является ответить на вопрос как геометрия деформированной сетки влияет на точность реконструкций (3) и (8). В следующем разделе мы используем компактный и расширенный шаблон для реконструкции функции $U(x, y)$ и её градиента $\nabla U = (\partial U/\partial x, \partial U/\partial y)$ и сравниваем результаты, полученные в обоих случаях.

3. Результаты расчетов

Мы начинаем наше обсуждение влияния геометрии вычислительной сетки на точность аппроксимации с рассмотрения следующего простого примера. Пусть координаты четырех точек на плоскости заданы следующим образом: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1 + \alpha/2, \alpha)$, $P_3 = (0, 1)$ и $P_4 = (1, 1)$. Неструктурированная сетка получается путем деления четырехугольника D с вершинами в точках P_i , $i = 1, \dots, 4$ на два треугольника e_1 и e_2 , как это показано на рис. 2. Параметр $\alpha \in [0, \infty)$ управляет геометрией сетки. Значение $\alpha = 0$ соответствует регулярной геометрии единичного квадрата, в то время как увеличение α искажает сетку, как это изображено на рис. 2а.

Рассмотрим уравнение адвекции в области D

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

где a – постоянная адвективная скорость. Уравнение (10) дополняется граничным условием

$$u(0, y) = u_0(y). \quad (11)$$

Функция $u_0(\xi)$ определяет решение краевой задачи (10), (11)

$$U(x, y) = u_0(y - ax). \quad (12)$$

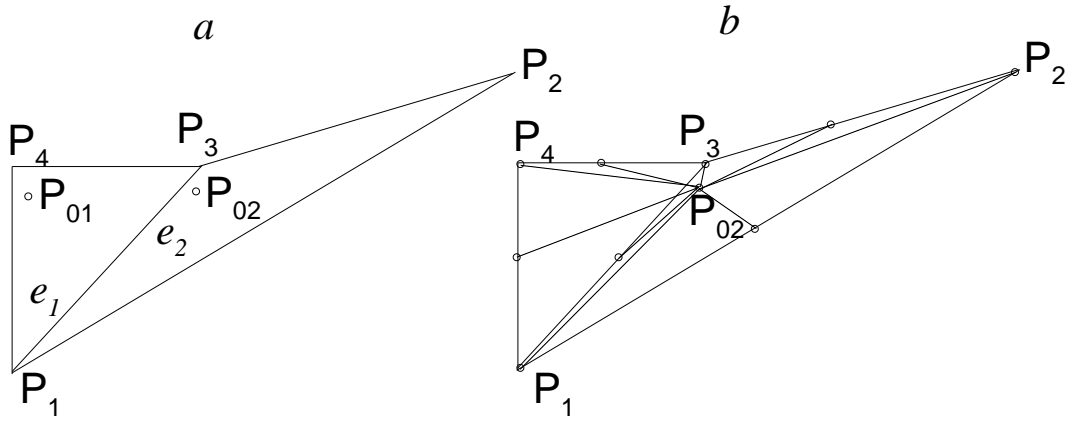


Рис. 2. (а) Геометрия сетки, состоящей из двух ячеек. Степень деформации сетки определяется параметром α . (б) Шаблон реконструкции МНК для точки P_{02} .

В нашем вычислительном эксперименте точное решение (12) задачи (10), (11) было выбрано как

$$U(x, y) = (y - ax)^4, \quad (13)$$

где адвективная скорость задана как $a = 1.0$. Мы затем восполняем функцию $U(x, y)$ методом наименьших квадратов и разрывным методом Галеркина в произвольной точке $P(x, y)$ области D , чтобы сравнить ошибку аппроксимации на расширенном и компактном шаблонах. Очевидно, как МНК, так и РМГ с показателем степени $K = 4$ обеспечивают точное восполнение решения, которое не зависит от геометрии сетки. Таким образом, наш первый тест состоит в том, чтобы проверить, насколько деформация сетки влияет на точность реконструкции на компактном и расширенном шаблонах для разложений решения с $K < 4$. Для этого мы увеличиваем параметр α и вычисляем ошибку решения и градиента в двух заданных точках сетки. Одна из наших контрольных точек, $P_{01} = (0.2, 0.75)$, расположена в ячейке e_1 , геометрия которой не меняется, когда мы увеличиваем α (см. рис. 2а). Другая контрольная точка, $P_{02} = (0.8, 0.75)$, принадлежит деформированной ячейке e_2 . Ошибка решения в точках P_{01} и P_{02} определяется как

$$err_s(P_0) = |U(x, y) - u_h(x, y)|_{P_{0i}}, \quad i = 1, 2,$$

где $u_h(x, y)$ – приближенное решение, полученное из разложения (3) или (8). Аналогично, ошибка градиента вычисляется как

$$\begin{aligned} e_{\nabla}(P_0) &= \|\nabla U(x, y) - \nabla u_h(x, y)\|_{P_0} = \\ &= \sqrt{((\partial U / \partial x)_{P_0} - (\partial u_h / \partial x)_{P_0})^2 + ((\partial U / \partial y)_{P_0} - (\partial u_h / \partial y)_{P_0})^2}, \end{aligned}$$

где производные приближенного решения $u_h(x, y)$ получены дифференцированием разложений (3) и (8).

Как обсуждалось в предыдущем разделе, определение вектора \mathbf{U} в методе наименьших квадратов требует расширенного шаблона реконструкции. Для линейной реконструкции ($K = 1$) достаточно определить данные \mathbf{U} в узлах сетки, в то время как для реконструкции высокого порядка функция \mathbf{U} должна быть определена в дополнительных точках сетки. Для наших расчетов эти точки выбраны так, что они равномерно распределены на ребрах ячеек сетки. Пример шаблона реконструкции для $K = 2$ показан на рис. 2b. Вектор входных значений \mathbf{U} для метода наименьших квадратов вычисляется как $U_n = U(x_n, y_n)$, $n = 1, \dots, N$, где функция $U(x, y)$ определяется решением (12).

Необходимо отметить, что решение задачи Римана для уравнения адвекции (10) на интерфейсе между ячейками e_1 и e_2 дает следующее хорошо известное выражение для численного потока:

$$F(u_L, u_R) = \begin{cases} u_L, & \text{если поток направлен из } e_i, i = 1, 2, \\ u_R, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Из определения (14) следует, что результаты РМГ аппроксимации в ячейке e_1 не зависят от аппроксимации в ячейке e_2 . Приближенное решение в ячейке e_1 зависит только от граничного условия, поставленного на границе $x = 0$. Таким образом, можно ожидать, что, в отличие от метода наименьших квадратов (6), реконструкция на компактном шаблоне приведет к более точному решению, поскольку деформация ячейки e_2 не влияет на решение в соседней ячейке.

Сначала мы рассматриваем результаты реконструкции для степени полинома $K = 1$, где мы используем три базисные функции в обоих разложениях (3) и (8). В табл. 1 представлены ошибка решения и градиента в точке P_{01} для МНК и РМГ реконструкции. Результаты, представленные в таблице, показывают, что ошибка РМГ не зависит от геометрии сетки, в то время как увеличение параметра α влияет на ошибку МНК в ячейке e_1 . Например, реконструкция РМГ на предельно деформированной сетке $\alpha = 100.0$ имеет приемлемую ошибку решения и градиента, но МНК не работает на такой сетке.

Таблица 1. Реконструкция методом наименьших квадратов (LS) и разрывным методом Галеркина (DG) в точке P_{01} . Ошибка решения (err_s) и градиента (e_∇) показаны для восполнения решения линейным полиномом $K = 1$.

	err_s^{LS}	err_s^{DG}	e_∇^{LS}	e_∇^{DG}
$\alpha = 0.0$	0.4375	0.1319	0.7071	0.2357
$\alpha = 0.5$	0.4157	0.1319	1.1722	0.2357
$\alpha = 1.0$	0.3915	0.1319	1.5970	0.2357
$\alpha = 10.0$	0.6832	0.1319	22.1897	0.2357
$\alpha = 100.0$	434.544	0.1319	7966.24	0.2357

Ошибка решения и градиента в точке P_{02} показана в табл. 2. Теперь обе аппроксимации чувствительны к деформации сетки. Из таблицы видно, что ошибка растет для обоих методов с увеличением α и оба метода перестают работать для относительно малого значения $\alpha = 10.0$. Необходимо отметить, что интервал значений

Таблица 2. Реконструкция методом наименьших квадратов (LS) и разрывным методом Галеркина (DG) в точке P_{02} . Ошибка решения (err_s) и градиента (e_{∇}) показаны для восполнения решения линейным полиномом $K = 1$.

	err_s^{LS}	err_s^{DG}	e_{∇}^{LS}	e_{∇}^{DG}
$\alpha = 0.0$	0.5	0.1388	0.0	0.9428
$\alpha = 0.5$	0.7472	0.2429	0.5399	1.4338
$\alpha = 1.0$	0.9655	0.3966	1.0231	2.0713
$\alpha = 10.0$	10.086	35.555	21.78	60.339
$\alpha = 100.0$	3392.8	128266.6	7965.9	28087.22

α в наших тестах соответствует геометрии сеток, используемых в задачах вычислительной аэродинамики. Например, решение задач с высоким числом Рейнольдса требует построения сеток с аспектным отношением порядка 10^5 в погранслое. Таким образом, на грубой сетке, которая может использоваться на первой стадии адаптации сетки к решению аэродинамической задачи, можно ожидать очень большую ошибку приближённого решения.

В нашем следующем тесте мы проверяем сходимость обоих методов. Для фиксированной геометрии сетки увеличение степени полинома в разложении приближенного решения должно приводить к более точной аппроксимации. Это утверждение является справедливым для регулярных геометрий [24], но оно должно быть проверено на деформированных сетках. Поэтому мы увеличиваем порядок аппроксимации в разложениях (3) и (8) для фиксированного значения α . В отличие от нашего предыдущего теста, мы вычисляем ошибку решения не в отдельной точке, а на всей сетке. Для этой цели мы используем L_2 -норму ошибки решения

$$e_{L_2} = \int \int_D (U(x) - u_h(x))^2 ds. \quad (15)$$

Мы также вычисляем L_{∞} -норму ошибки

$$e_{L_{\infty}} = \max_{(x,y) \in D} |U(x,y) - u_h(x,y)|. \quad (16)$$

Для получения интегральной нормы решения ошибка (15) была вычислена в точках квадратур Гаусса, используемых в каждой ячейке сетки для численного интегрирования, требуемого в РМГ.

Результаты теста показаны в табл. 3. Значение параметра $\alpha = 1.0$ было выбрано для того, чтобы построить слабо деформированную сетку. Результаты расчетов демонстрируют, что для данной степени полинома величина ошибки меньше в том случае, когда для получения приближенного решения используется РМК. Это наблюдение подтверждается результатами нашего предыдущего теста, где было показано, что в РМК вклад в интегральную ошибку от первой ячейки сетки является пренебрежимо малым, и вся ошибка аккумулируется во второй ячейке. Однако основная разница между двумя подходами состоит в том, что увеличение степени полинома в разложении решения до $K = 3$ понижает ошибку в РМГ, в то время

как реконструкция кубическим полиномом в МНК увеличивает ошибку по сравнению с линейной и квадратичной реконструкцией. Этот результат показывает, что проблема реконструкции в конечно-объемных методах на анизотропных сетках требует дальнейшего анализа. Ниже мы кратко обсуждаем особенности МНК, которые приводят к потере точности приближённого решения.

Таблица 3. Реконструкция методом наименьших квадратов (LS) и разрывным методом Галеркина (DG) для различных полиномиальных степеней $K > 0$. L_2 -норма и L_∞ -норма ошибки решения вычислены на слабо деформированной сетке $\alpha = 1.0$.

	$e_{L_\infty}^{LS}$	$e_{L_2}^{LS}$	$e_{L_\infty}^{DG}$	$e_{L_2}^{DG}$
$K = 1$	$0.1148e + 1$	0.8011	0.3085	0.1608
$K = 2$	0.6721	0.4237	0.1552	0.1061
$K = 3$	$0.4162e + 1$	$0.3631e + 1$	0.0152	$0.778e - 2$

Очевидно, увеличение параметра α приводит к увеличению линейного размера ячейки и, как следствие, к понижению точности аппроксимации. Следующий пример иллюстрирует это утверждение. Для удобства дальнейшего изложения рассмотрим линейное преобразование геометрии рис. 2а, так что точки имеют теперь следующие координаты $P_1 = (-\Delta x, 0)$, $P_2 = (0, \Delta y)$, $P_3 = (\Delta x + \alpha, \alpha)$ и $P_4 = (0, -\Delta y)$. Пусть мы ищем приближение решения МНК в точке $P_0 = (0, 0)$ и используем для реконструкции линейный многочлен

$$u_{LS}(x, y) = u_0 + u_1(x - x_0) + u_2(y - y_0). \quad (17)$$

Положим $\alpha = 0.0$, тогда $P_3 = (\Delta x, 0)$. Для этой симметричной конфигурации мы имеем следующую реконструкцию решения:

$$u_{LS}(x, y) = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{4} + \frac{(U_3 - U_1)}{2\Delta x}x + \frac{(U_2 - U_4)}{2\Delta y}y,$$

где U_i , $i = 1, \dots, 4$ являются заданными значениями функции $U(x, y)$ в точках P_i . Такая аппроксимация аналогична приближению решения в конечно-разностных схемах (см., например, [25]), и из полученного выражения можно видеть, что процедура МНК обеспечивает аппроксимацию со вторым порядком точности как для решения $U(x, y)$, так и для производных $(\partial U(x, y)/\partial x, \partial U(x, y)/\partial y)$ в точке P_0 . В то же время на сильно вытянутой сетке, где $\alpha \rightarrow \infty$, мы получаем следующую аппроксимацию в точке P_0 :

$$u_{LS}(P_0) \equiv u_0 \rightarrow \frac{1}{4}U_1 + \frac{1}{4}U_2 + \frac{1}{2}U_4, \quad \alpha \rightarrow \infty$$

то есть МНК теряет порядок аппроксимации на вытянутых сетках. Интересно отметить, что если бы мы удалили точку P_3 из шаблона и рассмотрели аппроксимацию на 3-точечном шаблоне P_1 , P_2 и P_4 , то получили бы следующий результат:

$$u_{LS}(P_0) \equiv u_0 = \frac{1}{2}(U_2 + U_4),$$

где линейная интерполяция между точками P_2 и P_4 опять обеспечивает аппроксимацию со вторым порядком точности.

Проведенный выше анализ показывает, что геометрически далекие точки в шаблоне реконструкции влияют на точность аппроксимации. Такие точки должны быть удалены из шаблона или путём измельчения сетки, или правильным подбором весовых коэффициентов в МНК [26, 24]. Однако анализ геометрически далёких точек не отвечает на вопрос о том, почему увеличение степени полинома в (3) не приводит к увеличению порядка аппроксимации МНК на слабо деформированных сетках, где нет далёких точек.

Низкая точность МНК на слабо деформированных сетках обсуждалась в [27], где было показано, что точность реконструкции на расширенном шаблоне зависит не только от удаленности точек шаблона от центральной точки, но и от взаимного расположения точек шаблона. Следующий пример иллюстрирует вышесказанное. Рассмотрим квадратичный полином

$$U(x, y) = ax^2 + y, \quad (18)$$

где значение параметра a выбрано как $a = -0.001$. Мы рассматриваем линейную реконструкцию градиента $\partial U/\partial x = 2ax$, $\partial U/\partial y = 1$ в начале координат $P_0 = (0, 0)$,

$$u_{LS}(x, y) - u(P_0) = u_1x + u_2y. \quad (19)$$

Если функция (18) известна в точке P_0 , для линейной реконструкции МНК неизвестными являются только два коэффициента u_1 и u_2 в разложении (17).

Пусть координаты точек шаблона заданы как $P_1 = (-H, h_1)$, $P_2 = (0, h_0)$, $P_3 = (H, h_1)$ и $P_4 = (0, -\alpha)$, где h_0 , h_1 и H – параметры сетки, значения которых $H \gg 1$, $H \gg h_1$, $h_1 \gg h_0$ (см. рис. 3). Выбор шаблона $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ приводит к следующей матрице метода наименьших квадратов:

$$[A] = \begin{bmatrix} -H & h_1 \\ 0 & h_0 \\ H & h_1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Вектор правой части уравнений МНК определяется как $\mathbf{U} = (aH^2 + h_1, h_0, aH^2 + h_1, -\alpha)^T$. Тогда градиент аппроксимируется в точке P_0 как

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{2h_1(aH^2 + h_1) + h_0^2 + \alpha^2}{\alpha^2 + h_0^2 + 2h_1^2} = 1 + \frac{2ah_1H^2}{\alpha^2 + h_0^2 + 2h_1^2}, \quad (20)$$

в то время как точное значение градиента $\nabla U(P_0) = (0, 1)$.

Из полученной аппроксимации градиента видно, что коэффициент разложения u_2 зависит от параметра α . Пусть точность ϵ , с которой аппроксимируют градиент, определяется как

$$|u_2 - \partial U(P_0)/\partial y| = \epsilon. \quad (21)$$

Подставляя точные и приближённые значения градиента в выражение (21), мы получаем

$$\frac{2|a|h_1H^2}{\alpha^2 + h_0^2 + 2h_1^2} = \epsilon, \quad \alpha^2 = \frac{2|a|h_1H^2}{\epsilon} - h_0^2 - 2h_1^2.$$

Если мы хотим аппроксимировать градиент с точностью $\epsilon \sim |a| = 10^{-3}$, то, принимая во внимание условие $H \gg h_1$, мы имеем следующую оценку значений параметра α :

$$\alpha \sim \sqrt{h_1}H. \quad (22)$$

Пусть $H = 20$, $h_1 = 0.5$, $h_0 = 0.01$. Тогда выбор параметра $\alpha = 15$ в выражении (20) приводит к значению $u_2 = 0.9982$. В то же время, если мы выберем параметр $\alpha = \alpha^* = 0.01$, условие (22) будет нарушено и мы получим $u_2 = 0.2003$. Таким образом, шаблон $\{P_1, P_2, P_3, P_4^*\}$, показанный на рис. 3, содержит 'неправильную' точку $P_4^* = (0, -\alpha^*)$. Включение этой точки в шаблон реконструкции МНК приводит к большой ошибке в аппроксимации градиента, несмотря на то, что точка P_4^* расположена близко к началу координат и не является геометрически удалённой точкой. Такие точки шаблона, названные в [27] численно удалёнными точками, приводят к потере точности реконструкции МНК на сетках, где невозможно контролировать геометрию шаблона.

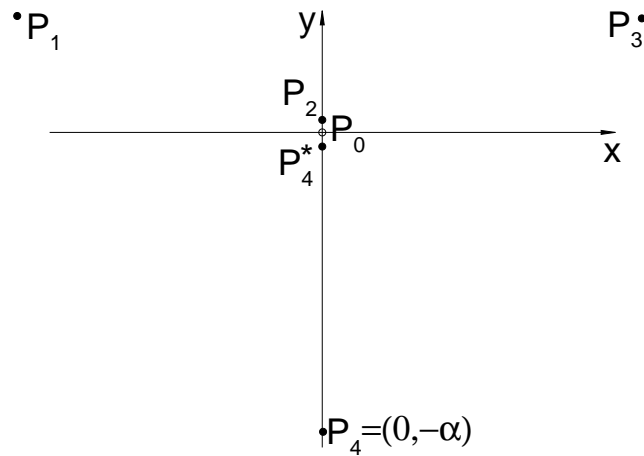


Рис. 3. Точность реконструкции МНК зависит от выбора точек шаблона. Выбор шаблона $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ приводит к реконструкции градиента с заданной точностью ϵ , в то время как шаблон $\{P_1, P_2, P_3, P_4^*\}$ не может обеспечить требуемую точность реконструкции.

Численно удалённые точки часто возникают в практических вычислениях на анизотропных сетках, полученных на начальной стадии адаптации сетки к решению. Так, например, поле скоростей в пограничном слое имеет большой градиент в направлении, нормальном к границе тела. Между тем, на грубой сетке, которая ещё недостаточно адаптирована к этой особенности решения, выбор точек шаблона может привести к ситуации, когда все они расположены вдоль тангенциального

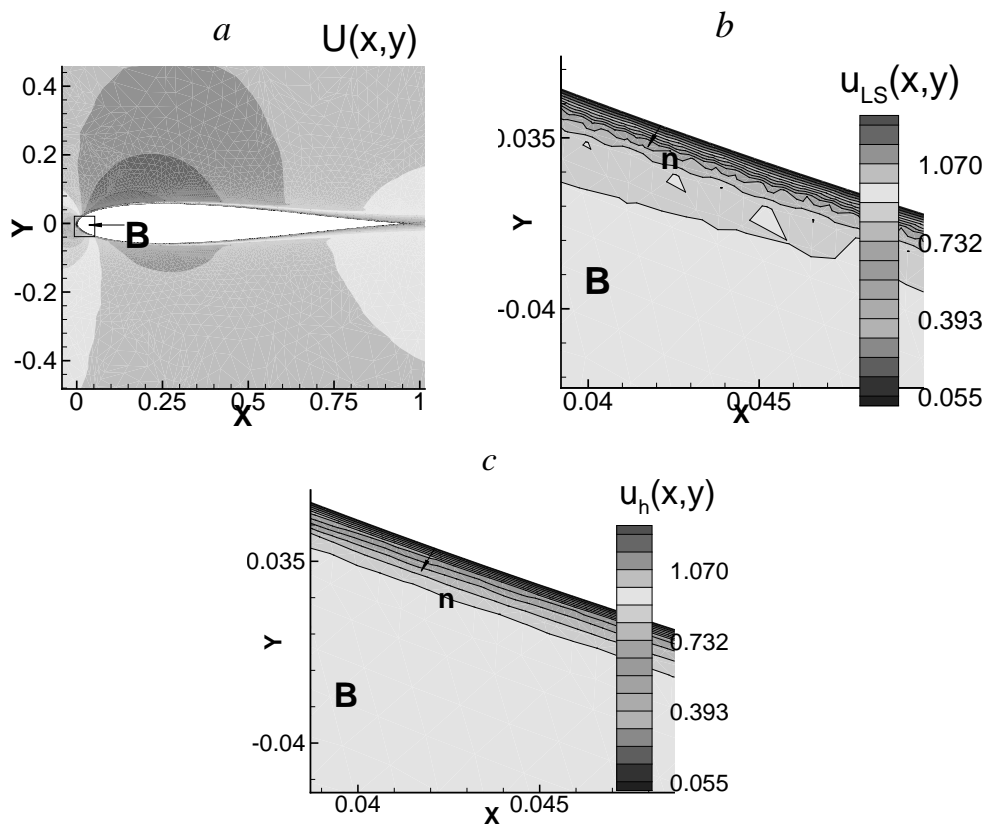


Рис. 4. Результаты реконструкции решения на сильно вытянутой сетке вблизи крыла. (а) Геометрия крыла и поле решения (x -компонента вектора скорости в уравнениях Навье-Стокса). (б) Аппроксимация МНК на расширенном шаблоне даёт немонотонное решение $u_{LS}(x,y)$ в пристеночной области (область **В** на рис. 4а). (с) Аппроксимация решения конечно-элементным методом на компактном шаблоне приводит к монотонному решению $u_h(x,y)$ в области **В**.

направления, где решение очень медленно меняется. В последнем случае реконструкция МНК даст неверные результаты. В качестве иллюстрации такого случая мы приводим рис. 4, где показана реконструкция решения (x -компонента вектора скорости в уравнениях Навье-Стокса, см. рис. 4а) на вытянутой сетке вблизи крыла. Шаблон реконструкции МНК на анизотропной сетке в пристеночной области не захватывает точки в направлении градиента решения. Вследствие этого реконструкция МНК приводит к немонотонному приближенному решению, показанному на рис. 4б. Аппроксимация на компактном шаблоне свободна от этого недостатка и поэтому даёт точное восполнение решения (см. рис. 4с).

4. Заключение

В настоящей работе мы исследовали влияние геометрии неструктурированной сетки на результаты дискретизации высокого порядка. Было продемонстрировано, что конечно-элементная схема на компактном шаблоне является менее чувстви-

ной к деформации сетки, чем схема конечного объёма на расширенном шаблоне. Мы также показали, что увеличение порядка полинома для локальной аппроксимации решения методом наименьших квадратов не улучшает аппроксимацию, как это происходит на сетках с регулярной геометрией ячеек, а наоборот приводит к ухудшению точности решения. Для понимания этого результата необходимо отметить, что асимптотические оценки сходимости для метода наименьших квадратов остаются верными, когда уменьшается размер ячеек сетки. На мелкой сетке, адаптированной к решению численной задачи, реконструкция решения полиномом высокого порядка должна привести к более точным результатам. В нашей работе мы обсуждаем грубые сетки, полученные на начальной стадии алгоритма адаптации, где можно ожидать очень нерегулярную геометрию ячеек сетки. Как было показано в статье, метод наименьших квадратов не работает на таких сетках, что, в свою очередь, приводит к медленной сходимости или расходимости численного решения задачи. Иными словами, если решение не может быть вычислено с приемлемой точностью на грубых анизотропных сетках, как это происходит в конечно-объёмных схемах высокого порядка, дальнейшие вычисления, связанные с адаптацией сетки к решению, становятся невозможными.

Полученные нами результаты могут рассматриваться как первый шаг на пути к пониманию свойств дискретизации высокого порядка на сетках с произвольной геометрией ячеек. Одним из важных вопросов в современной вычислительной аэродинамике является вопрос о том, возможно ли применение схем высокого порядка на анизотропных адаптивных сетках. В настоящее время становится понятно, что положительный ответ на этот вопрос позволит развить экономичные и высокоэффективные компьютерные программы для промышленных аэродинамических задач [6]. Поэтому изучение влияния геометрии сетки на точность дискретизации является важной частью работы по разработке и применению компьютерных программ для современной аэродинамики.

Приоритеты в будущей работе будут отданы изучению нелинейных уравнений, поскольку пока остаётся неясным, будет ли схема высокого порядка на компактном шаблоне нечувствительна к деформации сетки, когда нелинейное уравнение решается итерациями. Другим вопросом, требующим дальнейшего изучения, когда рассматриваются схемы на компактном шаблоне, является возможность локального увеличения степени полиномов в разложении решения в подобластях, где сетка сильно вытянута. Такой подход может помочь добиться более высокой точности аппроксимации на анизотропных сетках. В то же время для схем на расширенном шаблоне открытым остаётся вопрос об оптимальном выборе точек шаблона реконструкции. Решение этого вопроса позволит успешно применять конечно-объёмные методы высокого порядка на произвольных неструктурированных сетках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.В. Волков, С.В. Ляпунов.* Исследование эффективности использования численных схем высокого порядка точности для решения уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса на неструктурированных адаптивных сетках // ЖВМиМФ, 2006, т.46, № 10, с. 1894-1907.
2. *M.B. Bieterman, J.E. Bussoletti, C.L. Hilmes, F.T. Johnson, R.G. Melvin, and D.P. Young.* An Adaptive Grid Method for Analysis of 3D Aircraft Configurations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, v.101, с.225-249.
3. *D.L. Darmofal, R. Haimes.* Towards the Next Generation in CFD // AIAA 2005-0087.

4. *T. Barth and P. Frederickson*. Higher-Order Solution of the Euler Equations on Unstructured Grids Using Quadratic Reconstruction // AIAA 90-0013, 1990.
5. *T.J. Barth*. Numerical Methods for Gasdynamic Systems on Unstructured Meshes // Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg., 1998, v.8, p.195-284.
6. *V. Venkatakrishnan, S. Allmaras, D. Kamenetskii, F. Johnson*. Higher Order Schemes for the Compressible Navier-Stokes Equations // AIAA 2003-3987, 2003.
7. *Ch. Hirsch*. Numerical Computation of Internal and External Flows. – John Wiley & Son, Ltd, 1990, 714 с.
8. *T.J. Barth, D.C. Jespersen*. The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes // AIAA 89-0366, 1989.
9. *C. Ollivier-Gooch and M. Van Altena*. A High-Order-Accurate Unstructured Mesh Finite-Volume Scheme for the Advection-Diffusion Equation // J. Comp. Phys., 2002, v.181, p. 729-752.
10. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов*. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001, 608 с.
11. *F. Bassi and S. Rebay*. A High -Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations // J. Comput.Phys., 1997, v.131(2), p.267-279.
12. *B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.-W. Shu*. The Development of Discontinuous Galerkin Methods // Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg., 2000, v.11, p.3-50.
13. *T.J.R. Hughes and A. Brooks*. A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion // in Finite Element Methods for Convection Dominated Flows. 1979, ASME, New York.
14. *R.K. Agarwal and D.W. Halt*. A Compact High-Order Unstructured Grids Method for the Solution of Euler Equations // Int. J. Num. Meth. Fluids, 1999, v.31, p.121-147.
15. *D. Vigneron, J.-M. Vaassen, J.A. Essers*. An Implicit High Order Cell-Centered Finite Volume Scheme for the Solution of Three-Dimensional Navier-Stokes Equations on Unstructured Grids // in Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2003, MA, USA.
16. *G.F. Carey*. Computational Grids: Generation, Adaptation, and Solution Strategies. - Taylor & Francis, 1997, 496 с.
17. *W.K. Anderson*. A Grid Generation and Flow Solution Method for the Euler Equations on Unstructured Grids // J. Comput. Phys., 1994, v.110(1), p.23–38.
18. *S.J. Sherwin and J. Peiro*. Mesh Generation in Curvilinear Domains Using High-Order Elements // Int. J. Num. Meth. Engrg., 2002, v.53, p.207-223.
19. *А.Н. Гильманов*. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.: Наука, 2000, 240 с.
20. *А.С. Лебедев, В.Д. Лисейкин, Г.С. Хакимзянов*. Разработка методов построения адаптивных сеток // Вычислительные технологии, 2002, т.7, №3, с. 29-43.
21. *А.А. Мартынов, С.Ю. Медведев*. Надежный способ построения сеток с вытянутыми ячейками. В сб.: Построение расчетных сеток: теория и приложения. ред. С.А. Иваненко, В.А. Гаранжа. ВЦ РАН, Москва, 2002, с. 266-276.
22. *N.B. Petrovskaya*. Modification of a Finite Volume Scheme for Laplace's Equation // SIAM J. Sci. Comput., 2001, v.23(3), p.891-909.
23. *W.H. Reed and T.R. Hill*. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation // Technical Report LA-UR-73-479, 1973, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico.
24. *Н.Б. Петровская*. Выбор весовых коэффициентов в задаче аппроксимации градиента методом наименьших квадратов // Математич. моделирование, 2004, т.16, № 5, с.83-93.
25. *Н.Н. Калиткин*. Численные методы. – М.: Наука, 1978, 272 с.
26. *D.J. Mavriplis*. Revisiting the Least - Square Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes // AIAA 2003-3986, 2003.
27. *N.B. Petrovskaya*. Discontinuous Weighted Least-Squares Approximation on Irregular Grids // CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2008, v.32(2), p.69-84.

Поступила в редакцию 04.12.2008.