

**АППРОКСИМАЦИЯ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**© *Н.Б. Петровская*

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Работа была поддержана компанией "Боинг" (контракт 104AE) и Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант № 03-01-00063).

В работе рассмотрен разрывный метод Галёркина высокого порядка. Для изучения схемы высокого порядка особый интерес представляют задачи, решением которых являются разрывные функции. Аппроксимация разрывных решений рассмотрена на примере обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе показано, что аппроксимация разрыва схемой высокого порядка приводит к осцилляциям решения в ячейке расчётной сетки, содержащей разрыв. Для линейной краевой задачи получены аналитические выражения для амплитуды скачка решения на разрыве. Приведены численные примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

**APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS
IN HIGH ORDER DISCONTINUOUS GALERKIN SCHEMES***N.B.Petrovskaya*

Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS

The paper concerns high order discontinuous Galerkin schemes. The numerical solution of ordinary differential equations is considered for those problems where the approximation of a discontinuous solution is required. It will be shown that the high order discontinuous Galerkin approximation results in solution overshoots on a grid cell which contains a discontinuity. For a linear problem, analytical expressions to evaluate the amplitude of the solution overshoot are obtained. Numerical examples confirming the theoretical results are given for both linear and nonlinear problems.

Введение

Численное решение современных задач физики и техники диктует необходимость развития расчетных схем высокого порядка. Одной из таких схем является разрывный метод Галёркина (в дальнейшем РМГ), описанный впервые в [1] и развитый впоследствии многими авторами применительно к различным приложениям (см. [2], в которой дан подробный обзор метода). В отличие от классического метода Галёркина, РМГ аппроксимирует решение функциями, разрывными на границах ячеек расчетной сетки. При таком подходе возникает задача аппроксимации потока на каждом сеточном интерфейсе, решение которой также входит в формулировку метода. Интерес к схемам типа РМГ вызван тем, что их использование приносит в численное решение задачи ряд преимуществ, среди которых отметим возможность выбора порядка аппроксимации в каждой ячейке расчётной сетки. Метод также удобен для распараллеливания вычислений и даёт возможность работы как на структурированных, так и неструктурированных сетках.

Оценки сходимости, полученные в [2, 3] демонстрируют, что при применении схемы РМГ для аппроксимации гладкой функции, получение приближённого решения не представляет трудностей с точки зрения сходимости. В то же время использование РМГ высокого порядка в задачах, решение которых разрывно, приводит к появлению осцилляций вблизи разрыва. Распространяясь по расчётной области, такие осцилляции часто приводят к отсутствию сходимости в численном решении задачи. Хорошо известным способом исключить нефизические осцилляции является использование локальных ограничителей

[4, 5], которые понижают порядок аппроксимации на разрыве. Использование локальных ограничителей в схеме РМГ во многих случаях позволяет получить решение, монотонное вблизи разрыва [3]. Однако, локальные ограничители не всегда оказываются эффективными ввиду того, что они привносят в схему дополнительную диссипацию и тем самым понижают точность расчётов [6].

Требование разработки более совершенных методов контроля нефизических осцилляций заставляет обратиться к подробному изучению аппроксимации разрывов в схемах РМГ высокого порядка. На начальной стадии работы интерес представляет рассмотрение схемы РМГ для обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведённый нами в работе анализ линейной краевой задачи с функцией источника специального вида, которая позволяет моделировать разрывное решение, показывает, что приближение разрывного решения набором гладких функций неизбежно приводит к осцилляциям численного решения в ячейке сетки, содержащей разрыв. При этом амплитуда таких осцилляций не зависит от шага сетки, вследствие чего они не исчезают с измельчением сетки в области разрыва. Этот результат справедлив и для нелинейных краевых задач, что подтверждает проведенный в работе вычислительный эксперимент.

1. Формулировка метода

Мы рассматриваем следующую краевую задачу для функции $u(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$F_x(x, u) = S(x), \quad \mathbf{B}u(x) = 0, \quad x \in \Omega = [a, b], \quad (1)$$

где $F(x, u(x))$ - функция потока, $S(x)$ - заданная функция источника, а обозначение \mathbf{B} используется для оператора граничного условия. Для численного решения краевой задачи (1) введём расчетную сетку G следующим образом: $G = \bigcup_{i=1}^N e_i$, $e_i = [x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq N$, где x_i - координата узла сетки.

Разрывный метод Галёркина определяет приближенное решение $u_h(x)$ в каждой ячейке сетки как

$$u_h(x) = \sum_{k=0}^K u_k \phi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad x \in e_i, \quad (2)$$

где базисные функции выбраны полиномами соответствующей степени,

$$\phi_k(x) = ((x - x_i)/(x_{i+1} - x_i))^k, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad x \in e_i.$$

Приближенное решение ищется, исходя из условия ортогональности невязки метода функциям $\phi_k(x)$. Уравнение (1) умножают на функцию $\phi_k(x)$ и интегрируют по частям в каждой ячейке сетки. В полученные уравнения

$$\begin{aligned} & F(x_{i+1}, u(x_{i+1}))\phi_k(x_{i+1}) - F(x_i, u(x_i))\phi_k(x_i) - \\ & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, u) \frac{d\phi_k(x)}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\phi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, K \end{aligned}$$

подставляют приближённое решение (2), что приводит к требованию аппроксимации потока в узлах сетки, т.к. решение разрывно на каждом сеточном интерфейсе.

Пусть определён численный поток $\tilde{F}(u_h)$, который в общем случае зависит от двух значений решения в данном узле сетки x_i . Уравнения РМГ в ячейке сетки e_i выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \tilde{F}(u_h(x_{i+1}))\phi_k(x_{i+1}) - \tilde{F}(u_h(x_i))\phi_k(x_i) - \\ & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, u_h(x)) \frac{d\phi_k(x)}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\phi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (3)$$

Проведя дискретизацию задачи (1) на расчетной сетке, мы получаем систему нелинейных уравнений, для решения которой может быть использован метод Ньютона или метод установления по времени (см., например, [7]).

2. Линейная краевая задача

Пусть решение исходной краевой задачи разрывно. Для понимания того, как гладкие функции (2) аппроксимируют разрывное решение, мы рассматриваем линейную краевую задачу

$$u_x = S(x), \quad u(0) = U_0, \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

с функцией источника специального вида, которая будет определена ниже. Этот пример удобен тем, что позволяет получить аналитическое выражение для приближенного решения при использовании схемы (3).

Для численного решения задачи (4) в схеме РМГ используется определение потока Энквиста–Ошера [8]

$$\tilde{F}^{EO}(u_l, u_r) = \int_0^{u_r} \min(F'(s), 0) ds + \int_0^{u_l} \max(F'(s), 0) ds + F(0), \quad (5)$$

где $u_l = u_h(x_i - 0)$ и $u_r = u_h(x_i + 0)$ - левое и правое значения решения в узле сетки. Для линейного уравнения (4) мы имеем $F(x, u) \equiv u$, и определение (5) даёт хорошо известную схему "против потока", в которой $\tilde{F}(u_h) = u_l$.

Для анализа немонотонного численного решения на разрыве было выбрано следующее простое решение краевой задачи (4):

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq x < x_s, \\ U_1, & x_s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

где x_s - координата разрыва. Для модельного решения $U(x)$ функция источника $S(x)$ определяется путём дифференцирования решения, $S(x) = dU(x)/dx$.

Рассмотрим ячейку сетки $e_s = [x_i, x_{i+1}]$, $i = i_s$, которой принадлежит точка x_s , $x_i < x_s < x_{i+1}$. В дальнейшем, для удобства изложения мы полагаем, что $U_0 = 0$, $x_i = 0$ и $x_{i+1} = h$, так что положение разрыва может быть параметризовано как

$$x_s = \alpha h, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (7)$$

Для применения схемы РМГ с учётом параметризации (7) в ячейке e_s удобно использовать базисные функции вида $\phi_k(x) = x^k$, $l = 0, 1, \dots, K$.

2.1. Приближение линейной функцией. Мы начинаем наше рассмотрение схемы для разрывного решения (6) со случая его приближения линейной функцией

$$u_h(x) = u_0 + u_1 x. \quad (8)$$

Определение численного потока требует заменить решение $u_h(0)$ на левой границе ячейки на граничное значение U_0 . Подставляя приближённое решение (8) в дискретизацию (3) и принимая во внимание условие $U_0 = 0$, мы получаем следующую систему уравнений для неизвестных (u_0, u_1) :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 h &= \int_0^h S(x) dx, \\ (u_0 + u_1 h)h - \int_0^h (u_0 + u_1 x) dx &= \int_0^h S(x)x dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения коэффициентов (u_0, u_1) необходимо вычислить интегралы в правой части (9). Для разрывного решения (6) функцию источника $S(x) = dU(x)/dx$ можно формально представить как $S(x) = C\delta(x - x_s)$, где δ -функция Дирака $\delta(x)$ определена как

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \delta(\xi - \xi^*) f(\xi) d\xi = \begin{cases} f(\xi^*), & \xi^* \in [\xi_1, \xi_2], \\ 0, & \xi^* \notin [\xi_1, \xi_2]. \end{cases}$$

Значение множителя C определяется непосредственным интегрированием

$$\int_0^h S(x) dx = C \int_0^h \delta(x - x_s) dx = C.$$

С другой стороны,

$$\int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{dU(x)}{dx} dx = U(h) - U(0) = U_1 - U_0$$

и мы получаем $C = [u]$, где $[u] = U_1 - U_0$ – скачок решения в точке x_s .

Принимая во внимание параметризацию (7), интегралы в правой части (9) вычисляются как

$$\int_0^h S(x) dx = [u], \quad \int_0^h S(x)x dx = \alpha h[u]. \quad (10)$$

Решение системы (9) с правой частью (10) даёт следующее выражение для коэффициентов разложения в (8):

$$u_0 = (1 - 2\alpha)[u], \quad u_1 = 2\alpha \frac{[u]}{h}. \quad (11)$$

Из первого уравнения в (9) следует, что для линейного уравнения (4) РМГ даёт точное значение решения на правой границе ячейки $x = h$. Действительно, мы имеем $u_h(h) = u_0 + u_1 h = \int_0^h S(x) dx = U(h)$. Далее, поскольку линейное приближение (8) является монотонной функцией в области e_s , его "экстремум" (т.е. такой скачок решения, амплитуда которого не уменьшается с измельчением сетки) может возникнуть только на левой границе ячейки $x = 0$.

Значением приближенного решения на левой границе является $u_h(0) = u_0$. Из полученных нами выражений (11) следует, что коэффициент u_0 в разложении (8) не зависит от шага сетки h и является только функцией положения разрыва решения, $u_0 = u_0(\alpha)$. Ошибка решения на границе $x = 0$ может быть вычислена как

$$|U(0) - u_h(0)| = |u_0(\alpha)| = |(1 - 2\alpha)U_1| \neq 0, \quad \forall \alpha \neq 1/2.$$

Таким образом, приближённое решение, полученное как результат дискретизации (9) не сходится в норме $L^\infty = \max_{x \in e_s} |U(x) - u_h(x)|$ в области e_s .

Функция $\bar{u}_0(\alpha) = u_0(\alpha)/[u]$ показана на рис.1а. Из выражения (11) легко видеть, что $\alpha_0 = 1/2$ является критическим значением параметра α . Для любого положения разрыва $0 < \alpha \leq \alpha_0$ решение ограничено как

$$0 \leq u_0(\alpha) < U_1. \quad (12)$$

В то же время любое значение $\alpha_0 < \alpha < 1$ производит скачок решения в точке $x = 0$, который делает решение немонотонным. При этом, чем ближе расположен разрыв к правой границе области e_s , тем больше величина скачка $u_0 \rightarrow [u]$.

Параметр α порождает поле решения $u_h(x, \alpha)$, которое показано на рис.1б. Решения, соответствующие значениям $\alpha_0 < \alpha$ и $\alpha_0 < \alpha < 1$, разделены на рисунке линией $u_h(x, \alpha_0)$. Значение α_0 является единственным положением разрыва, которому соответствует решение $u(x, \alpha_0)$, не имеющее скачка на левой границе. Для любого другого значения $\alpha \neq \alpha_0$ приближённое решение остаётся разрывным на левой границе при уменьшении шага сетки $h \rightarrow 0$. Таким образом, критическое значение α_0 может быть получено из требования непрерывности $u_h(0, \alpha_0) = U_0$.

Мы будем говорить, что приближённое решение квазимоноotonно на разрыве, если

- i) $u_h(x)$ - монотонная функция на области определения, и
- ii) вариация решения $u_h(x)$ такова, что

$$U_0 \leq u_h(x) \leq U_1. \quad (13)$$

Из выражения (11) следует, что для приближения решения линейной функцией, любое положение разрыва $0 < \alpha \leq \alpha_0$ порождает квазимонотонное решение. При этом решение, соответствующее параметру α_0 , является оптимальным с точки зрения определения (13).

2.2. Приближение квадратичной функцией. Обратимся теперь к рассмотрению восполнения решения полиномом высокой степени. В отличие от линейной функции, приближение полиномом порядка $K > 1$ требует учесть возможные экстремумы решения в области e_s . В качестве примера рассмотрим приближение решения квадратичной функцией

$$u(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2. \quad (14)$$

Получим выражения для коэффициентов разложения аналогично тому, как это было сделано в линейном случае. Метод (3) даёт нам следующую систему для коэффициентов разложения в (14):

$$\begin{bmatrix} 1 & h & h^2 \\ 6h & 3h^2 & 2h^3 \\ 6h^2 & 4h^3 & 3h^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [u] \begin{pmatrix} 1 \\ 6h(1-\alpha) \\ 6h^2(1-\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2)^T$ зависит от положения разрыва α как

$$u_0 = (6\alpha^2 - 6\alpha + 1)[u], \quad u_1 = 6(3\alpha - 4\alpha^2) \frac{[u]}{h}, \quad u_2 = 6(3\alpha^2 - 2\alpha) \frac{[u]}{h^2}. \quad (15)$$

Определим значения параметра α , которым соответствует решение, удовлетворяющее (12). Принимая во внимание, что для данного решения $[u] = U_1$, подстановка функции $u_0(\alpha)$ в неравенства (12) даёт

$$\begin{cases} 6\alpha^2 - 6\alpha + 1 \geq 0, \\ \alpha(1 - \alpha) > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решение этой системы приводит к следующим ограничениям на положение разрыва:

$$\alpha \in \mathcal{D}_1 = (0, \alpha_2] \cup [\alpha_3, 1), \quad \text{где } \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (17)$$

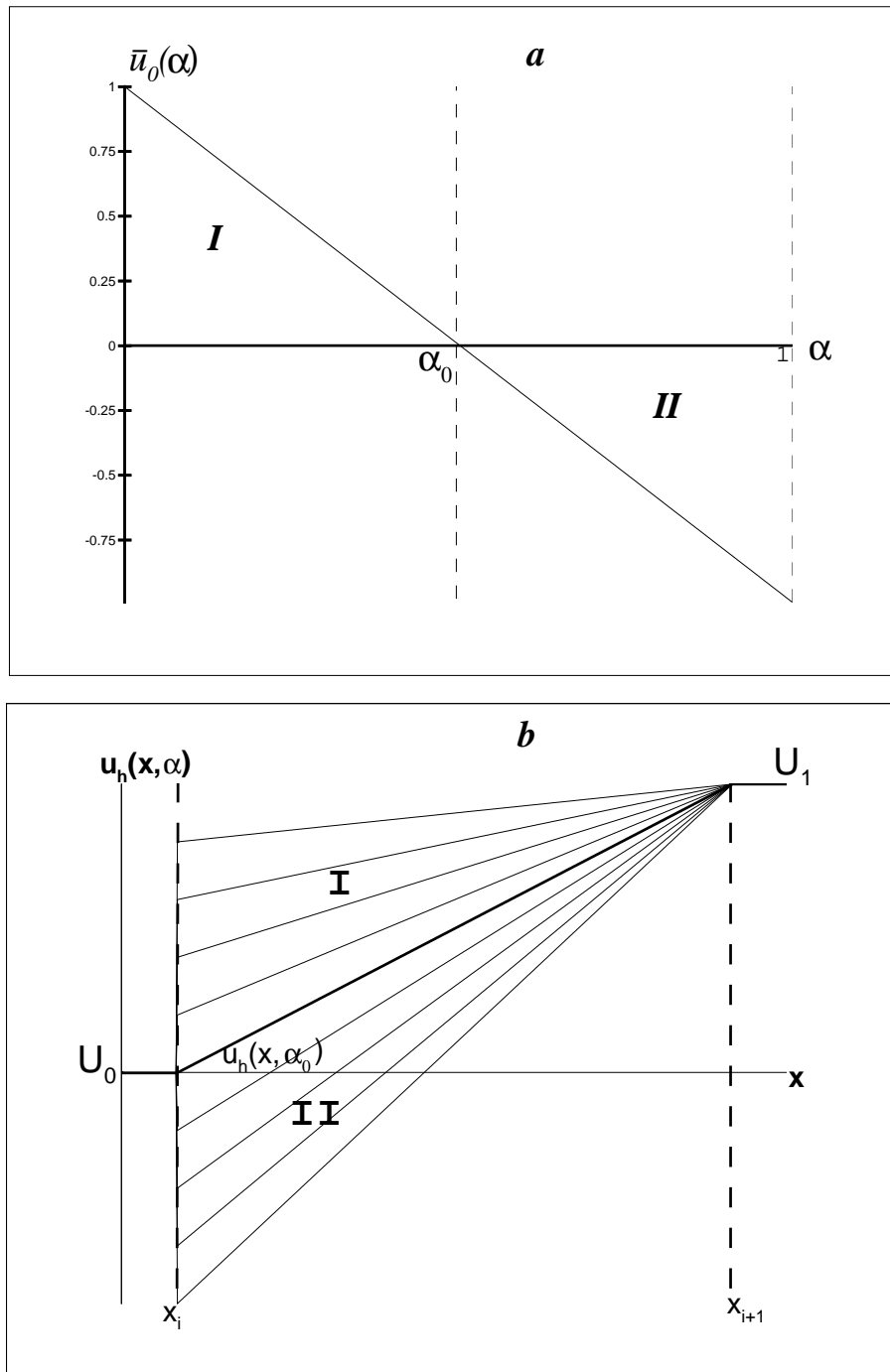


Рис. 1. Приближенное решение для степени полинома $K = 1$ в ячейке, содержащей разрыв. (a). Функция $\bar{u}_0(\alpha) = u_0(\alpha)/[u]$ на левой границе области e_s . (b). Поле решений $u(x, \alpha)$, порожденное положением разрыва α .

Однако значения (17) параметра α не обеспечивают выполнения неравенств (12) во всей области e_s , поскольку, в отличие от линейной функции, решение теперь может иметь экстремум во внутренней точке отрезка e_s . Для того, чтобы решение оставалось монотонной функцией в ячейке e_s , должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} x_{ext} < 0, \\ x_{ext} > h, \end{cases} \quad (18)$$

где x_{ext} – координата экстремума. Выполнение (18) означает, что экстремум квадратичной функции расположен вне области e_s . Таким образом, неравенства (12) должны решаться совместно с системой (18).

В результате решения $\frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=x_{ext}} = 0$, мы получаем положение экстремума как функцию параметра α :

$$x_{ext}(\alpha) = \frac{h}{2} \frac{4\alpha - 3}{3\alpha - 2}. \quad (19)$$

Значение $u_{ext} = u(x_{ext})$ определяется как

$$u_{ext}(\alpha) = \frac{-12\alpha^3 + 12\alpha^2 + 3\alpha - 4}{6\alpha - 4} [u].$$

Функция $x_{ext}(\alpha)$ показана на рис. 2а.

Подстановка (19) в (18) приводит к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{3 - 4\alpha}{3\alpha - 2} > 0, \\ \frac{\alpha - 1}{3\alpha - 2} > 0. \end{cases}$$

Решение этой системы даёт нам значения параметра α , которые обеспечивают монотонное решение в ячейке сетки e_s

$$\alpha \in \mathcal{D}_2 = (\alpha_0, \alpha_1), \quad \text{где } \alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}. \quad (20)$$

Сравнение выражений (17) и (20) показывает, что области их определения не пересекаются, $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = 0$. Этот результат позволяет нам заключить, что квадратичное восполнение разрывного решения не обеспечивает монотонного решения в области e_s . Любое приближённое решение, скачок которого на интерфейсе сетки удовлетворяет условию (12), имеет экстремум во внутренней точке ячейки e_s . Напротив, любое решение, монотонное на интервале e_s , будет неизбежно иметь скачок с амплитудой, большей чем U_1 , на границе ячейки.

Зависимость решения от параметра α теперь имеет более сложную структуру по сравнению с линейным случаем. Для квадратичной функции мы имеем два свободных параметра, определяющих вид решения в области e_s . (В общем случае для однозначного определения квадратичной функции необходимо три параметра, но решение на правой границе, которое может рассматриваться как третий свободный параметр, уже определено из уравнения (3).) В качестве первого параметра мы выбираем вариацию решения на левой границе. Это значение контролируется функцией $u_0(\alpha)$. В качестве второго параметра можно выбрать значение решения в точке экстремума, которое определяется функцией $u_{ext}(\alpha)$.

Функция $\bar{u}_0(\alpha) = u_0(\alpha)/[u]$ показана пунктирной линией на рис.2б. Заметим, что для квадратичной функции $u_0(\alpha)$ уравнение $u_h(0, \alpha_0) = U_0$ теперь имеет два корня α_2 и α_3 . В

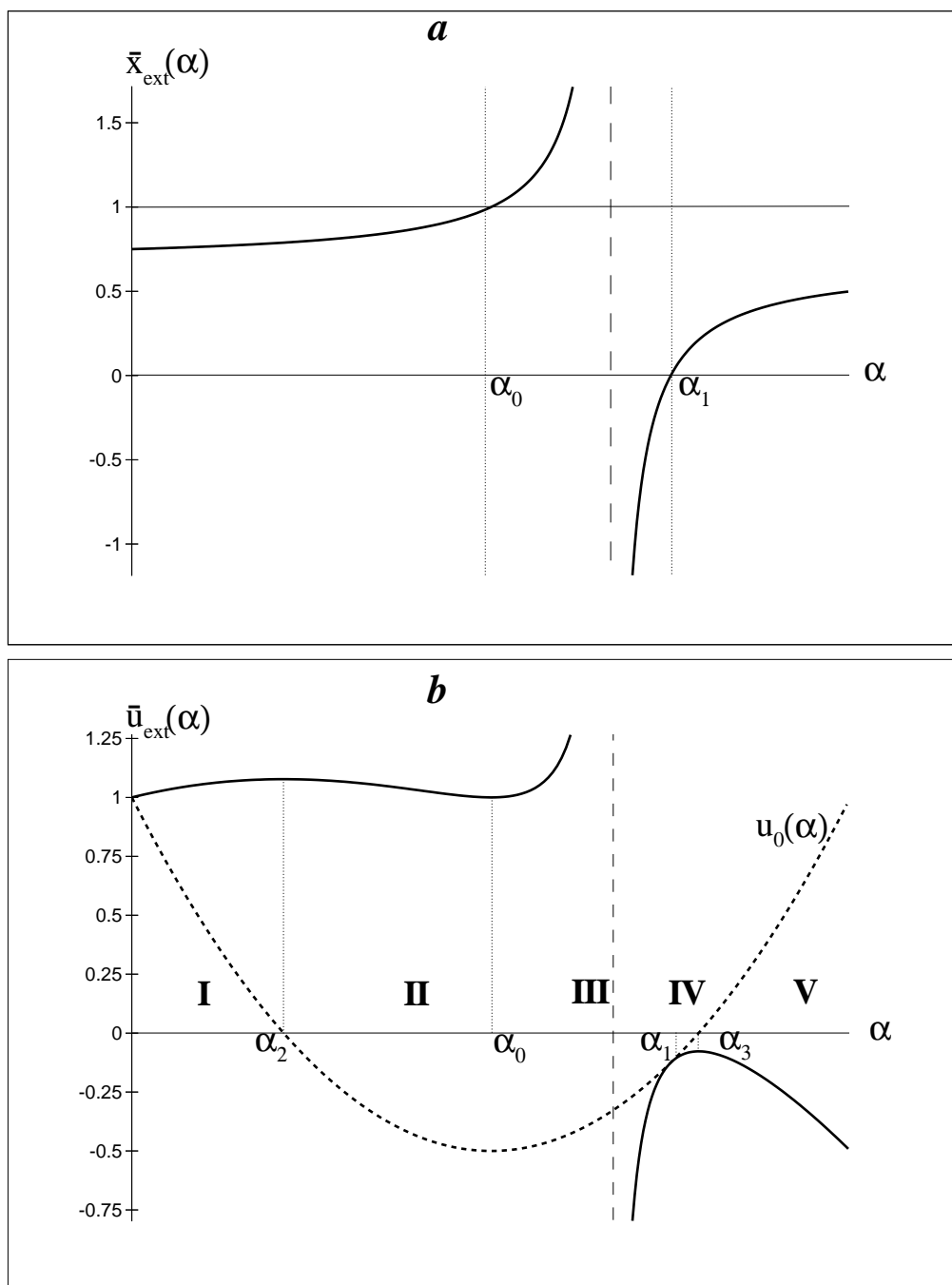


Рис. 2. Параметры, определяющие приближенное решение для степени полинома $K = 2$ на разрыве. (a). Координата $\bar{x}_{\text{ext}}(\alpha)$ экстремума приближенного решения. (b). Решение $\bar{u}_0(\alpha)$ на левой границе (пунктирная линия) и величина экстремума решения $\bar{u}_{\text{ext}}(x, \alpha)$ как функции положения разрыва (жирная линия).

том случае, когда разрыв расположен в любой из этих точек, на левой границе ячейки e_s отсутствует скачок приближённого решения.

Функция $u_{ext}(\alpha)/[u]$ показана как сплошная жирная линия на рис.2b. Определим минимум $u_{ext}(\alpha)$, который обеспечивает наименьший возможный скачок решения в точке x_{ext} . Из рассмотрения функции $u_{ext}(\alpha)$ следует, что экстремумы расположены в точках α_0 , α_2 , и α_3 . Поскольку значение α_0 является критическим для функции $x_{ext}(\alpha)$ (см.рис. 2a), такое положение разрыва порождает монотонное решение внутри интервала e_s . Экстремум этого решения расположен на правой границе области, $u_{ext}(\alpha = 1) = U_1$. Однако величина скачка решения на левой границе составляет половину амплитуды разрыва: $|u_0(\alpha_0)| = 0.5[u]$. В то же время, значения α_2 и α_3 порождают непрерывные решения с минимальным возможным скачком на границе: $u_{ext}(\alpha_2) = u_{ext}(\alpha_3) \approx 0.08[u]$. Поэтому, любое из этих двух положений разрыва в ячейке рассматривается нами как порождающее оптимальное квадратичное восполнение в схеме РМГ.

Параметрическое поле $u_h(x, \alpha)$ показано на рис.3a для значений $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Решения, соответствующие значениям параметра $\alpha_0 \leq \alpha < 1$, показаны на рис.3b. Для малых значений $\alpha = \epsilon \ll 1$ (разрыв расположен вблизи левой границы области), решение $u(x, \epsilon)$ является функцией, близкой к постоянной величине. Решение в области I ($0 < \alpha < \alpha_2$) и области V ($\alpha_3 < \alpha < 1$) на рисунке (см. также рис.2) немонотонно и имеет экстремум во внутренней точке x_{ext} интервала e_s . Решение в области II ($\alpha_2 < \alpha < \alpha_0$) и области IV ($\alpha_1 < \alpha < \alpha_3$) имеет экстремум в точке x_{ext} и скачок на левой границе области. Наконец, в области III ($\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$) решение монотонно, но имеет скачок на левой границе. Пунктирная линия на рис.3b соответствует положению разрыва $\alpha = 2/3$. Для такого положения разрыва квадратичное восполнение решения вырождается в линейную функцию. Решениям, порождаемым значениями параметра α_2 и α_3 , соответствуют жирные кривые на рис.3a и рис.3b.

Анализ, аналогичный тому, что был проделан выше, может быть проведён для полинома произвольной степени K . В общем случае приближенное решение может иметь K экстремумов в области e_s . Полученные результаты показывают, что эти экстремумы не будут исчезать с измельчением сетки, приводя к осциллирующему приближённому решению в области, где решение дифференциальной задачи разрывно.

Мы завершаем изучение линейной краевой задачи рассмотрением численного примера. В [9] было предложено рассмотреть следующее разрывное решение $U(x)$ уравнения (4):

$$U(x) = \begin{cases} 1. - \sqrt{0.5 - x} & 0 \leq x < 0.5, \\ 1 & 0.5 < x \leq 1, \\ \tanh(200(x - 1.5)) & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Аналогично рассмотренному ранее подходу, функция источника $S(x)$ определяется путём дифференцирования решения, $S(x) = dU(x)/dx$.

Функция $U(x)$ разрывна в точке $x_{sh} = 1$, имеет разрыв производной в точке $x_d = 0.5$ и "пограничный слой", который характеризуется быстрым ростом функции на малом отрезке Δx , в окрестности точки $x_b = 1.5$. Вычислительный эксперимент показал, что использование схемы РМГ высокого порядка для численного решения задачи приводит к осцилляциям решения. При этом на грубых сетках приближенное решение немонотонно в каждой ячейке, где имеется особенность решения. Приближенное решения для степени полинома $K = 2$ показано на рис.4a на грубой сетке с числом узлов $N_g = 32$. На мелких сетках удаётся получить монотонное решение в зоне "пограничного слоя", т.е. в области, где решение имеет большой градиент, но остаётся гладким, в то время как осцилляции на разрыве сохраняются с измельчением сетки. Численное решение краевой задачи для степени полинома $K = 2$ показано на рис. 4b на мелкой сетке, число узлов которой $N_g = 512$.

В соответствии с проведённым нами анализом, амплитуда осцилляций на разрыве

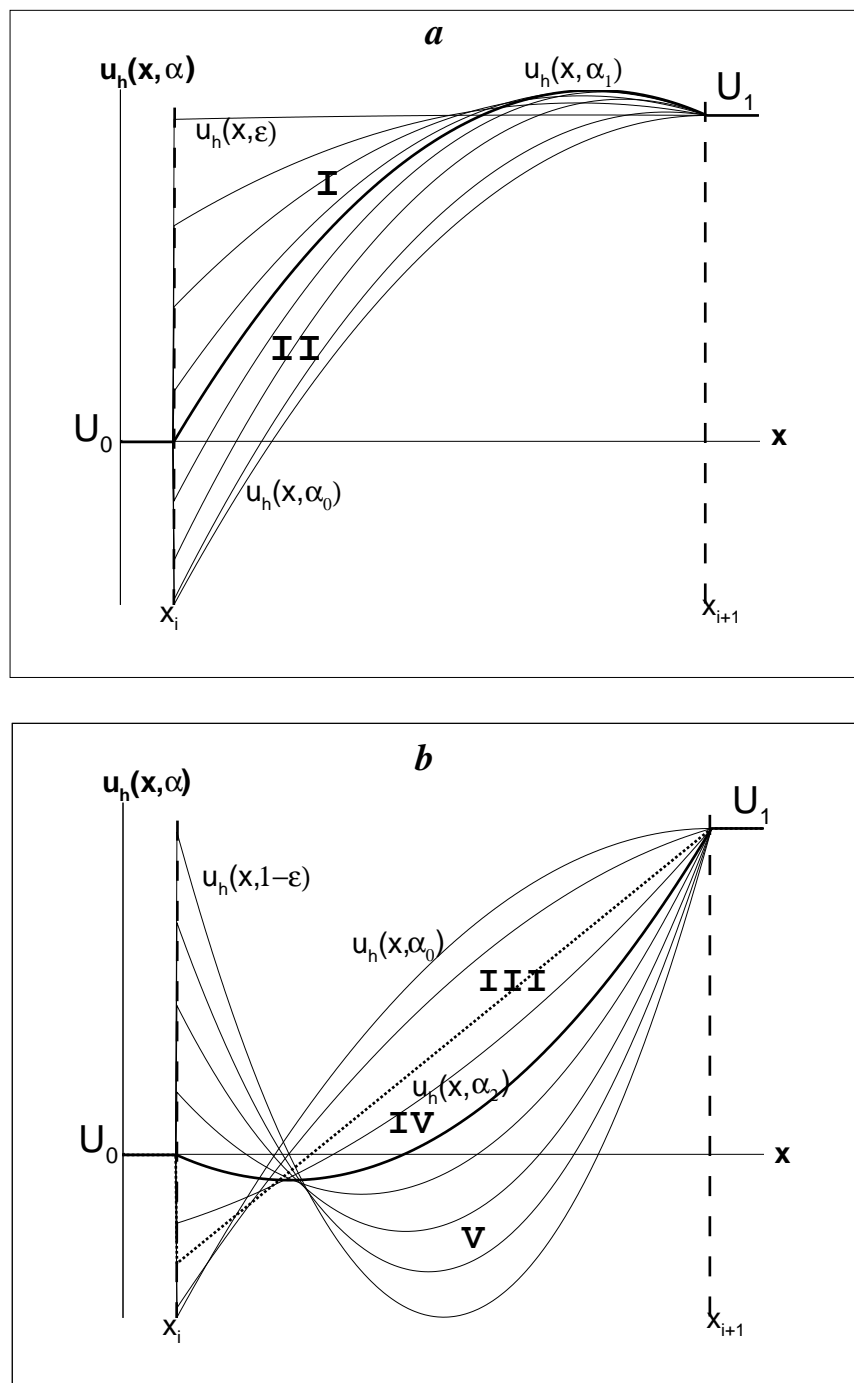


Рис. 3. Поле решений $u(x, \alpha)$ для приближения полиномом степени $K = 2$ на разрыве. (а). Параметр $\alpha \in (0, 1/2]$. (б). Параметр $\alpha \in [1/2, 1)$.

зависит от положения разрыва относительно левой границы ячейки. На рис.4б сетка выбрана таким образом, что положение разрыва $\alpha = 0.98$. Выражения (15) для приближённого решения подтверждают в этом случае наличие скачка решения с большой амплитудой, который показан на рисунке. Для того, чтобы уменьшить скачок немонотонного решения, мы двигаем узлы расчетной сетки вблизи разрыва, так чтобы положение разрыва относительно левой границы ячейки стало $\alpha = \alpha_3 \approx 0.785$. Приближенное решение на новой сетке показано на рис.4с. Из рисунка видно, что, в соответствии с выражениями (15), амплитуда скачка решения уменьшилась на сетке, адаптированной к положению разрыва.

3. Нелинейная краевая задача

Для нелинейной краевой задачи в общем случае не удаётся получить аналитическое выражение для приближённого решения на разрыве. Однако, основываясь на результатах, полученных для линейной задачи, мы можем ожидать осцилляции решения на разрыве при аппроксимации решения полиномом порядка $k > 0$. В качестве примера рассмотрим следующую задачу, известную как задача о расходе массы в канале с переменным сечением [10]. Пусть $A(x)$ – площадь сечения канала, $A(x) = 1/2 + 2(x - 1/2)^2$, $u(x)$ – скорость. Расход массы в канале описывается следующим уравнением:

$$\frac{dF(x, u(x))}{dx} \equiv \frac{d(A(x)m(u))}{dx} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (21)$$

где поток массы определяется как $m(u) = \frac{1}{2}(1 - u^2)$. Дополнительным условием является

$$\int_0^1 u(x) dx = B, \quad (22)$$

где постоянная B определяет тип решения. Выбор $B = -1/4$ позволяет получить разрывное решение, показанное на рис.5а,

$$U(x) = \begin{cases} -\sqrt{(1 - 1/2A(x))}, & 0 \leq x \leq 1/2, \text{ или } x_{sh} + 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{(1 - 1/2A(x))}, & 1/2 \leq x \leq x_{sh} - 0, \end{cases} \quad (23)$$

где x_{sh} – положение разрыва.

Для численного решения задачи в схеме РМГ используется определение потока (5). Дискретизация (3) задачи (21), (22) на расчетной сетке приводит к системе нелинейных уравнений, которая решается методом Ньютона. Для получения решения \mathbf{u}^{n+1} на $(n + 1)$ -й итерации решается линеаризованная система уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}^n)(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = -\mathbf{R}(\mathbf{u}^n), \quad (24)$$

где невязка метода $\mathbf{R}(\mathbf{u})$, которая задается уравнениями (3) в каждой ячейке сетки, и якобиан $\mathbf{J}(\mathbf{u}) = [\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{u}]$ зависят от решения \mathbf{u}^n на n -й итерации.

Пусть равномерная сетка с шагом h выбрана таким образом, чтобы разрыв оказался внутри ячейки сетки. Для того, чтобы продемонстрировать, как метод аппроксимирует решение на разрыве, выберем в качестве начального приближения $u^0(x)$ для метода Ньютона точное решение (23). Дискретизация начального приближения получается путём решения системы уравнений

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h(x) \phi_k(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x) \phi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

где приближенное решение $u_h(x)$ задано разложением (2) в каждой ячейке сетки. Полученная таким образом кусочно-полиномиальная функция $u_h^0(x)$ совпадает с точным решением $U(x)$ во всех узлах сетки, но не удовлетворяет требованию

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{u})\| = \max_{i=1, \dots, N} |\mathbf{R}(\mathbf{u})| < \epsilon,$$

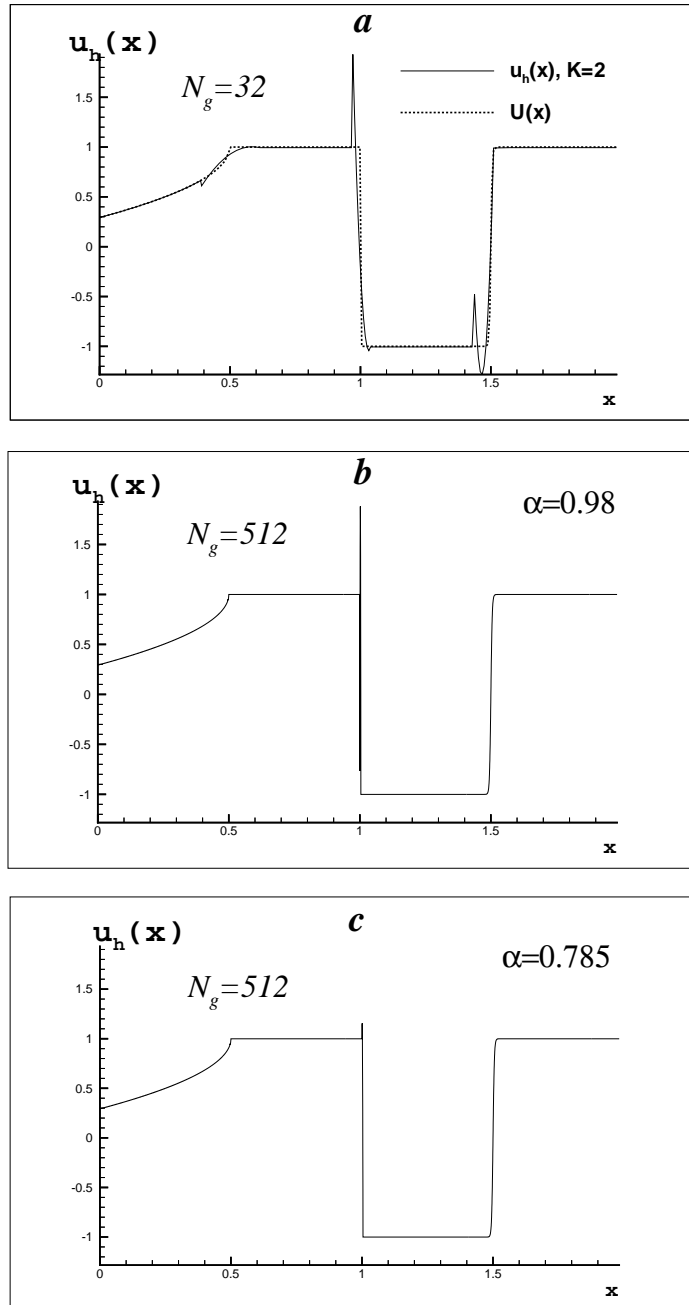


Рис. 4. Приближенное решение линейной краевой задачи. (a) На грубой сетке приближенное решение осциллирует вблизи всех особенностей решения. (b). На мелкой сетке осцилляции сохраняются вблизи разрыва. (c). Адаптация сетки к положению разрыва позволяет уменьшить амплитуду осцилляций.

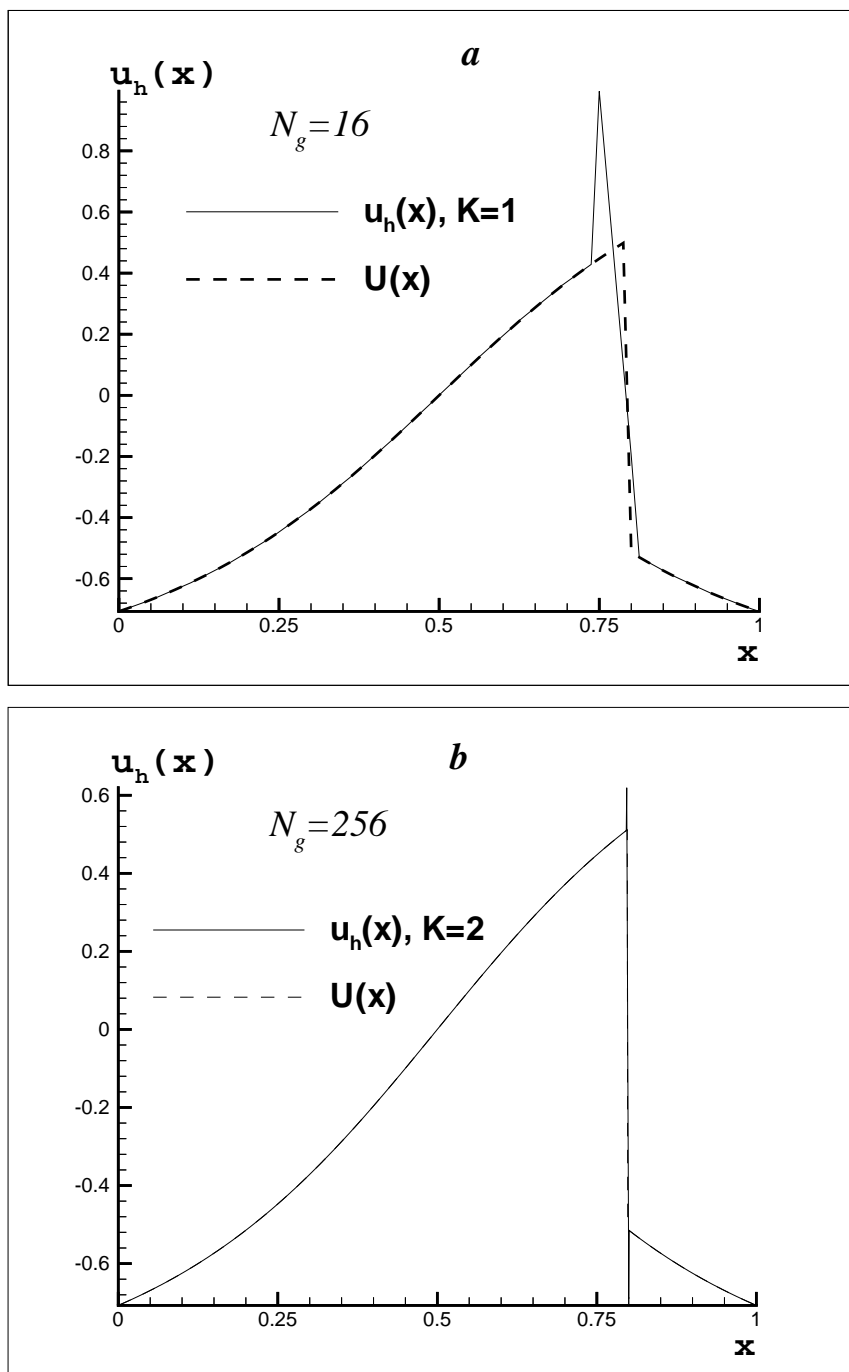


Рис. 5. Осцилляции приближенного решения нелинейной краевой задачи на разрыве. (a). Восполнение решения кусочно-линейными функциями приводит к скачку решения в ячейке, содержащей разрыв. Точное решение задачи показано пунктирной линией. (b). Осцилляции вблизи разрыва на мелкой сетке для восполнения решения полиномом степени $K = 2$.

которое является критерием завершения итераций в методе Ньютона. На следующих итерациях норма невязки быстро уменьшается до выбранного малого значения погрешности $\epsilon = 1.0e - 16$, что позволяет говорить о сходимости метода к приближенному решению на данной сетке. Однако полученное таким образом приближенное решение не совпадает более с точным решением в узлах ячейки, содержащей разрыв. Приближенное решение для степени полинома $K = 1$ показано на рис.5а на грубой сетке с числом узлов $N_g = 16$. Осцилляции приближенного решения на разрыве сохраняются и на мелкой сетке. Пример численного решения для степени полинома $K = 2$ представлен на рис.5б, где число узлов сетки $N_g = 256$.

Заключение

В настоящей работе был изучен механизм возникновения осцилляций в схемах РМГ высокого порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведенный в работе анализ линейной задачи показал, что аппроксимация разрывного решения гладкими функциями в схеме РМГ высокого порядка приводит к появлению осцилляций (скачков) решения вблизи разрыва. Важной особенностью этих осцилляций является то, что их амплитуда не зависит от шага сетки, и, следовательно, они не исчезают с измельчением сетки. Для линейной задачи было показано, что величина скачка решения зависит только от положения разрыва, что позволяет адаптировать расчётную сетку вблизи разрыва с тем, чтобы минимизировать амплитуду скачка.

Несмотря на то, что для нелинейной задачи не удаётся получить аналитическое выражение для скачка решения на разрыве, численные эксперименты подтверждают наличие осцилляций в нелинейной задаче. Полученные результаты демонстрируют, что аппроксимация разрывного решения гладкими функциями является одним из факторов, которые приводят к возникновению и развитию нефизических осцилляций в численном решении гиперболических систем законов сохранения, где использование схемы РМГ высокого порядка представляет большой практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W.H.Reed and T.R.Hill. *Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation*. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1973.
2. B.Cockburn, G.E.Karniadakis, and C.-W. Shu. The Development of Discontinuous Galerkin Methods, // *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications*, B.Cockburn, G.E.Karniadakis, and C.-W. Shu, eds., Lecture Notes in Comput.Sci.Engrg.,Springer-Verlag, New York, 2000, v.11, p.3-50.
3. B.Cockburn and C.Shu. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework, // *Math. Comp.*, 1989, v.52, p.411-435.
4. А.Г.Куликовский, Н.В.Погорелов, А.Ю.Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001, 608 с.
5. С.А.Величко, Ю.Б.Лифшиц, И.А.Солнцев. Расчёт нестационарных течений при помощи схемы повышенной точности. // *Ж.вычисл.матем. и матем.физики*, 1999, т.39, №5, с.850-864.
6. В.В.Корецкий. О свойствах монотонной разностной схемы, построенной на основе метода С.К.Годунова с использованием принципа минимальных значений производной. // *Числ. методы мех.сплошн.среды*, 1982, т.13, №4, с52-62.
7. Н.Н.Калиткин. Численные методы. - М.: Наука, 1978, 272 с.
8. B.Engquist, S. Osher. One-Sided Difference Equations for Nonlinear Conservation Laws, // *Math. Comp.*, 1981, v.36, p.321-352.
9. V. Venkatakrishnan. One-Dimensional Advection Test Problem, // BCAG technical report, The Boeing Company, M/S 67-LF, Seattle, WA, 2002.
10. J.D.Anderson. Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1991.

Поступила в редакцию 18.03.2004.